Введение.

Физика есть наука о наиболее общих свойствах и формах движения материи; изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы её движения. К настоящему времени известны два вида материи: вещество и поле.

Вещество - атомы и молекулы и все состоящие из них тела.

Второй вид материи образуют электромагнитные, гравитационные и другие поля. Различные виды материи могут превращаться друг в друга. Например: электрон может превращаться в фотон. Возможен и обратный процесс. Материя находится в непрерывном движении, под которым понимается всякое изменение вообще. Материя и движение неразделимы и не могут существовать друг без друга. Материя существует в пространстве и во времени, которые являются формами бытия материи.

Физические законы устанавливаются на основе обобщенных опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующих в природе. Эти законы обычно формулируются в виде количественных соотношений между различными величинами.

Методы физического исследования.

Основным методом исследования в физике является опыт, т.е. наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воспроизводить его каждый раз при повторении этих условий. Для объяснения экспериментальных данных привлекаются гипотезы.

Гипотеза – это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность высказанной гипотезы проверяется опытом. Успешно прошедшая проверку опытом и доказанная гипотеза становится научным законом или теорией.

Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы. Физическая теория дает объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.

Важную роль в процессе познания играют физические модели, основанные на упрощенных схемах явлений. В них учитываются только те свойства и явления, которые существенны для рассмотрения данного процесса или явления (несжимаемая жидкость, идеальный газ, абсолютно твердое тело и т.д.).

Размерности физических величин. Системы единиц. Основные единицы физических величин в СИ.

Изучение физических явлений и их закономерностей, а также использование этих закономерностей на практике связано с измерением физических величин. Здесь прогресс науки неразрывно связан с проведением точных измерений. **Менделеев**: «Наука начинается с тех пор, как начинает измерять; точная наука немыслима без меры. В природе мера и вес есть главные орудия познания».

Определим терминологию (этим занимаются в НИИ техн. информации, классификации и кодирования и Комитет научно-технической терминологии) - разработаны ГОСТы и сборники рекомендуемых терминов.

Физическая величина (величина) – характеристика одного из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общая в качественном отношении многим физическим объектам, но в количественном отношении индивидуальная для каждого объекта.

Размер физической величины – количественная определенность физической величины, присущая конкретному материальному объекту, системе, явлению или процессу.

Значение физической величины – оценка размера физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц.

Истинное значение физической величины – значение физической величины, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношении соответствующую физическую величину (может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений при бесконечном совершенствовании методов и средств измерений).

Действительное значение физической величины – значение физической величины, найденное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что для поставленной измерительной задачи может его заменить.

Физический параметр – физическая величина, рассматриваемая при измерении данной физической величины как вспомогательная характеристика этой величины.

Аддитивная величина – физическая величина, разные значения которой могут быть суммированы, умножены на числовой коэффициент, разделены друг на друга.

Неаддитивная величина – физическая величина, для которой умножение на числовой коэффициент или деление друг на друга её значений не имеет физического смысла (температура, твердость материала).

Числовое значение физической величины – отвлеченное число, входящее в значение величины. Для конкретной физической величины ее числовое значение зависит от размера выбранной единицы.

Единица физической величины – физическая величина фиксированного размера, которой условно присвоено значение, равное 1, и применяемая для количественного выражения однородных физических величин.

Уравнение связи между величинами – уравнение, отражающее законы природы, в котором под буквенными символами понимаются физические величины.

Уравнение связи между числовыми значениями – уравнение, в котором под буквенными символами понимаются числовые значения величин, соответствующие выбранным единицам.

Система физических величин – совокупность взаимосвязанных физических величин, образованных в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины принимаются за независимые, а другие являются функциями независимых величин.

Система физических величин состоит из основных физических величин и производных физических величин.

Основная физическая величина – физическая величина, входящая в систему величин и условно принятая в качестве не зависящей от других величин этой системы.

Производная физическая величина – физическая величина, входящая в систему величин и определяемая через основные величины этой системы.

Система единиц физических величин – совокупность основных и производных единиц физических величин, образованная в соответствии с принятыми принципами для заданной системы физических величин.

Рассмотрим системы единиц, применявшиеся до введения системы СИ.

1.**Метрическая система мер** – м, кг.

2.**Система Гаусса** (1832) – мм, мг, с.

3.**Система СГС** – см, г, с.

4.**Система МКС** – м, кг, с.

5.**Система МТС** – м, т, с. (Франция 1919, СССР 1933-1955)

6.**Система МКГСС** – м, кг-сила, с.

7.**Электростатическая система единиц СГСЭ** – к системе СГС добавляется единица электрического заряда.

8.**Электромагнитная система единиц СГСМ** – к системе СГС добавляется единица силы тока.

9.**Симметричная система единиц** – совокупность СГСЭ и СГСМ.

Размерность физической величины – выражение в форме степенного одночлена, составленного из произведений символов основных физических величин в различных степенях и отражающее связь данной физической величины с физическими величинами, принятыми в данной системе величин за основные и с коэффициентом пропорциональности, равным единице. Обозначение размерности: [ ] , dim.

XI Генеральная конференция по мерам и весам (1960) приняла решение о введение Международной системы единиц. Международная система единиц построена на основе системы величин, основными единицами которой являются:

- единица длины L – метр;
- единица массы M – кг;
- единица времени T – с;
-единица силы тока I – A;
- единица термодинамической температуры Ɵ - К;
- единица силы света J – Кд;
- единица количества вещества N – моль.

Общий вид размерности физической величины ф этой системе величин выражается формулой $\dim x = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} J^{p} N^{q}$ где α, β, γ, δ, ε, p, q – показатели размерности физической величины.

В системе СИ есть еще две дополнительные единицы:

1. **Радиан**_– угол между двумя радиусами окружности, которые образуют на окружности дугу, равную по длине радиусу окружности.

2. **Стерадиан** – пространственный угол, вершина которого находится в центре сферы и который вырезает площадь на поверхности шара, равную

площади квадрата, стороны которого имеют длину, равную радиусу сферы.

Метр – длина пути, проходимого в вакууме светом за 1/299 792 458 сек. (1983 г.)

Секунда – равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. (1967 г.)

Килограмм – равен массе международного прототипа килограмма. (1901 г.)

Кельвин – равен 1/273,16 термодинамической температуры тройной точки воды. (1967 г.)

Ампер – равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызывал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н. (1948 г.)

Кандела – представляет собой силу света в данном направлении от источника, испускающее монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1,683 Вт на стерадиан. (1979 г.)

Моль – равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. (1971 г.)

Кинематика.

Механическое движение.

Движение – это всякое изменение вообще. Простейшей формой движения материи является механическое движение, которое заключается в изменении с течением времени положения тел или их частей друг относительно друга.

Кинематика - раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил. В кинематике движущиеся объекты рассматриваются как материальные точки или абсолютно твердые тела.

Материальной точкой - называют тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Абсолютно твердое тело - материальное тело, в котором расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным (т.е. здесь мы пренебрегаем деформациями).

Движение происходит как в пространстве, так и во времени.

Система отсчета - совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение (или равновесие) каких-нибудь других материальных точек или тел.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – **поступательное** и **вращательное**.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

B B' B''

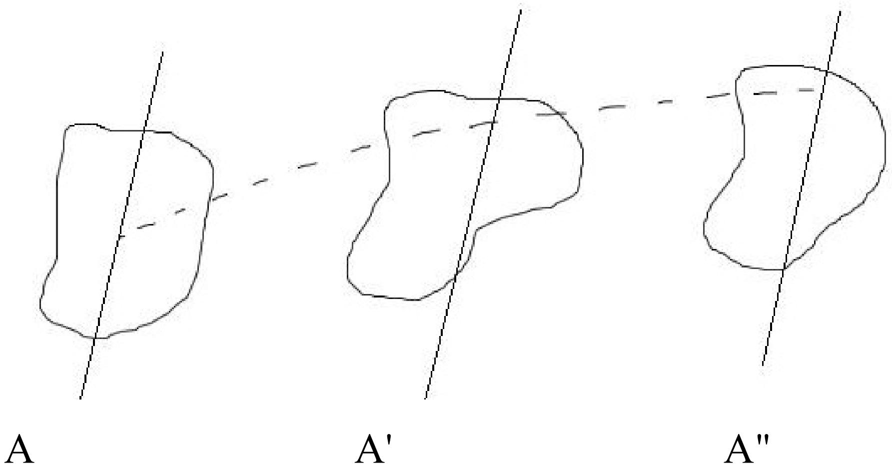


Рис. 1

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежит на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Ось вращения может находиться и вне тела.

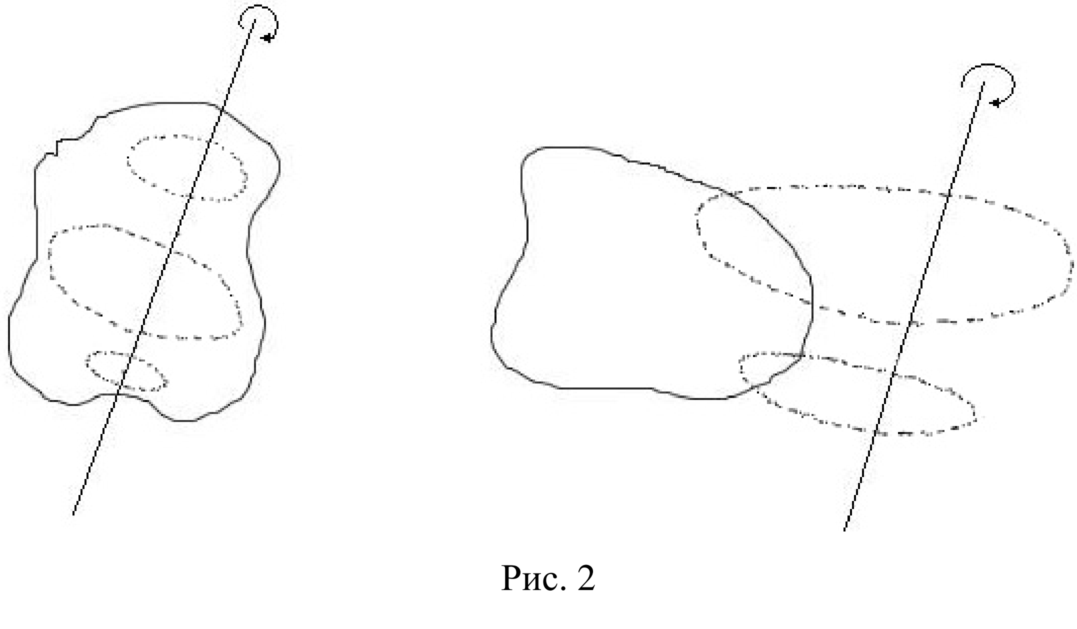


Рис. 2

Кинематические

характеристики поступательного движения.

Траектория – линия, которую описывает точка при своем движении. Если траектория – прямая линия, то движение называется прямолинейным, в противном случае – криволинейным.

Перемещение – d**r** – вектор, соединяющий положения движущейся точки в начале и в конце некоторого интервала времени dt; вектор перемещения направлен вдоль хорды траектории точки. Положение движущейся точки в пространстве определяется ее радиус-вектором.

Радиус – вектор точки – вектор, проведенный от некоторой точки, неизменно связанной с рассматриваемой системой отсчета, до движущейся точки.

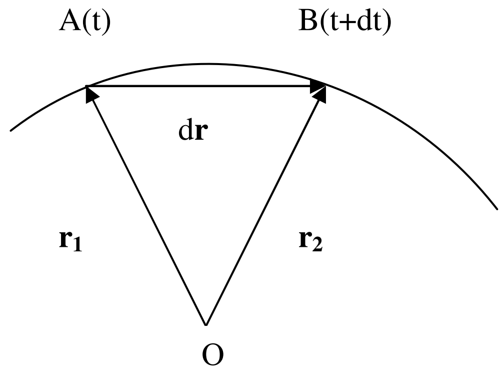


Рис. 3

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}$$

Путь точки (S) – расстояние, пройденное точкой за рассматриваемый интервал времени, измеряемое вдоль траектории в направлении движения. Размерность dim S = L. Единица пути [S] = 1м.

Скорость точки (v) – кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиус-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета.

Физический смысл: скорость - это векторная величина, характеризующая быстроту и направление перемещения. $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$

Размерность скорости $\dim v = LT^{-1}$. Единица скорости $[v] = 1$ м/с.

Скорость 1 м/с – это скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой эта точка за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.

Движение называется равномерным, если за сколь угодно малые одинаковые промежутки времени Δt точка проходит одинаковые пути ΔS.

Рассмотрим частный случай, когда точка движется вдоль прямой линии.

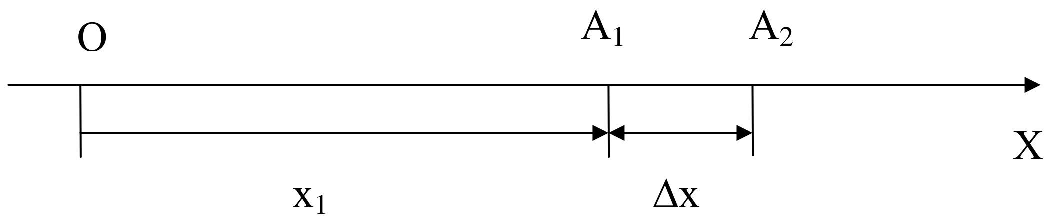


Рис. 4

Положение материальной точки в этом случае определяется одной координатой $x = x(t)$.

Пусть в некоторый момент времени t точка находится в т. A_1 и ее положение $x_1 = x(t)$. За время Δt материальная точка переместиться в т. A_2 с координатой $x_2 = x\ (t+\Delta t)$. За время Δt точка пройдет путь $\Delta x = x_2 - x_1 = x\ (t+\Delta t) – x(t)$.

Путь будет положительным, если точка перемещается в направлении оси X и отрицательным, если в обратном направлении. Тогда отношение пройденного пути Δx к промежутку времени Δt называется средней скоростью материальной точки за время между t и t + Δt

$$v_{cp} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Будем уменьшать промежуток времени Δt, устремляя его к нулю.

Тогда будет стремиться к нулю и проходимый путь. Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ будет стремиться к определенному пределу, который называется **истинной** или **мгновенной скоростью** материальной точки в момент времени t. dSt

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

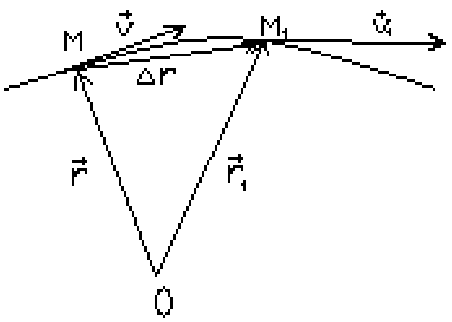


Рис. 5

Обобщим понятие скорости на случай криволинейного движения. Положение движущейся точки на траектории будем задавать ра

вектором **r**, проведенным в эту точку из начала координат.(рис.5).

Пусть в момент времени t материальная точка находится в положении M с радиусом-вектором **r**=**r**(t). Через время Δt она переместится в положение M_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r_1}$=**r**(t+Δt). При этом Δ**r**=$\mathbf{r_1}$-**r,** где Δ**r** – перемещение точки за время Δ t.

Величина $v_{\mathbf{cp}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$

называется средней скоростью движения за время между t и t+Δt и направлена по Δ**r.**

Величина $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ называется истинной или мгновенной скоростью материальной точки. Мгновенная скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории движущейся точки.

Вектор скорости, как и всякий другой вектор, можно представить в виде:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e_x} + v_y \mathbf{e_y} + v_z \mathbf{e_z},$$

где $v_{x,}$ v_y, v_z – проекции вектора **v** на координатные оси.

$\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}$ – единичные векторы по осям X, У, Z.

При этом $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e_x} + \dot{y}\mathbf{e_y} + \dot{z}\mathbf{e_z}$ и, следовательно, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$. Тогда $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Вектор скорости можно представить в виде:

$\mathbf{v} = v\mathbf{e_v}$, а радиус-вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}$. Тогда $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e_r} + r\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$,

$\dot{r}\,\mathbf{e}$ – прямолинейное движение,

$r\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ - вращение по окружности.

Ускорение материальной точки – мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки в рассматриваемой системе отсчета. v

$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}$ Размерность dim a = LT^{-2}. Единица ускорения [a] = 1м/с^2.

Метр на секунду в квадрате равен ускорению прямолинейного равноускоренного движения, при котором за время 1с скорость точки изменяется на 1м/с.

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Ускорением **a** называется вектор, равный первой производной от вектора скорости **v** или второй производной от радиуса-вектора **r** по времени. Ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и направлению.

$$\mathbf{a} = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}$$

$$\mathbf{a} = \dot{v}_x\mathbf{e_x} + \dot{v}_y\mathbf{e_y} + \dot{v}_z\mathbf{e_z}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\,\mathbf{e_x} + \ddot{y}\,\mathbf{e_y} + \ddot{z}\,\mathbf{e_z}$$

Проанализируем, учитывая $\mathbf{v}=v\mathbf{e}_v$.

1. Прямолинейное движение

При прямолинейном движении $\mathbf{e_v} = \text{const}$, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{e}_v$

$\dot{v} > 0$ – ускорение направлено как и скорость.

$\dot{v} < 0$ – ускорение направлено противоположно направлению скорости.

2. Равномерное движение по окружности

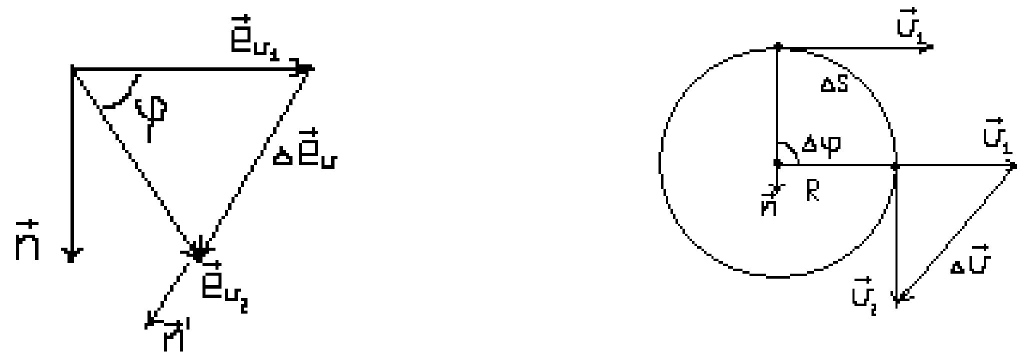


Рис. 6

При равномерном движении по окружности v – const.

$$\mathbf{a}=\mathbf{v}=v\mathbf{e_v}$$

При $\Delta t \to 0$ $\Delta\varphi \to 0$, при этом $\Delta\mathbf{e_v} \to \Delta\varphi$

Следовательно:

$$\Delta\mathbf{e_v} = \Delta\varphi\mathbf{n'}$$

С другой стороны $\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R} = \frac{v\Delta t}{R}$

$$\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e_v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi n'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta t}{\Delta t R}n' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}n' = \frac{v}{R}n$$

Следовательно, имеем:

$$\mathbf{a_n} = v\frac{v}{R}\mathbf{n} = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

n – единичный вектор, направленный вдоль нормали к вектору **v**

3. Неравномерное движение по криволинейной траектории.

При неравномерном движении по окружности изменяется величина и направление скорости.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{e}_v + \mathbf{v}\dot{e}_v$$

$\dot{v}\mathbf{e}_v$ - $\mathbf{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение

$\mathbf{v}\dot{e}_v$ - $\mathbf{a}_n$ – нормальное ускорение

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau};$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n};$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n;$$

$$a = \sqrt{a^2{}_\tau + a^2{}_n}$$

Кинематические характеристики вращательного движения.

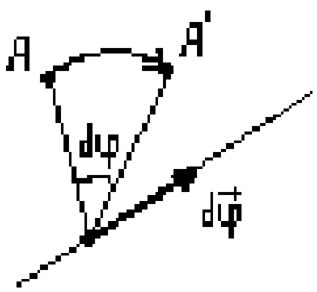


рис. 7

Угловое перемещение dφ – векторная величина, модуль которой равен бесконечно малому углу dφ поворота тела, а направление совпадает с осью вращения так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора dφ**.** Сумма нескольких угловых перемещений определяется по правилам векторного сложения. Угол поворота – величина скалярная. Угловое перемещение – безразмерная величина, выражаемая в радианах.

Угловая скорость – ω – кинематическая мера вращательного движения тела, выражаемая вектором, равным по модулю первой производной от угла поворота тела по времени и направленным вдоль мгновенной оси вращения в ту сторону, откуда элементарный поворот тела виден происходящим против часовой стрелки (или по правилу правого винта). Размерность угловой скорости dim ω = T^{-1}. Единица угловой скорости [ω] = 1 рад/с.

Радиан в секунду равен угловой скорости равномерно вращающегося тела, все точки которого за время 1с поворачиваются относительно оси на угол 1рад.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

При равномерном вращении

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения T – время, за которое тело делает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$. Тогда:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число оборотов в единицу времени

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ - частота вращения.

Следовательно:

$\omega = 2\pi\nu$.

Угловое ускорение (**ε**) – физическая векторная величина, определяемая первой производной от угловой скорости по времени:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Размерность углового ускорения: dim ε = $\frac{\dim\omega}{\dim t} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$. Единица углового ускорения: $[\varepsilon] = \frac{1 рад/с}{с} = 1\frac{рад}{с^2}$.

Радиан на секунду в квадрате равен угловому ускорению вращающегося тела, при котором оно за время 1с изменяет угловую скорость на 1 рад/с.

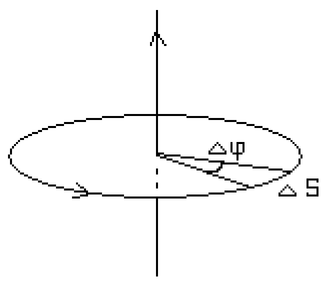
ε – вектор углового ускорения направлен по оси вращения.

Движение будет равноускоренным, если направление векторов **ε** и **ω** совпадают, и равнозамедленным, если векторы **ε** и **ω** направлены противоположно друг другу.

При вращении твердого тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Связь линейных и угловых кинематических характеристик.

Найдем связь между угловыми кинематическими характеристиками (**ω** и **ε**) и линейными кинематическими характеристиками (**v** и **a**)



Пусть за малый промежуток времени (Δt→0) точка повернулась на угол Δφ, при этом она пройдет путь ΔS=RΔφ. Линейная скорость материальной точки

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = R\omega$$

Рис. 8

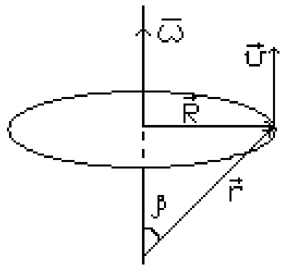


рис. 9

Следовательно

v = Rω

Найдем выражение, связывающее векторы **v** и **ω**

R=r sinβ, v=ωr sinβ, следовательно **v** = [**ωr**]

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\dot{\mathbf{v}} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R}] + [\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{R}}]$$

$$\dot{v} = \dot{\omega} R$$

$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{R}]$

Поступательное движение

$$S=vt$$

$$a=0$$

$$|\mathbf{v}|=const$$

$$a=const$$

$$v=v_0+at$$

$$S=S_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$$

Вращательное движение

$$|\boldsymbol{\omega}|=const$$

$$\varphi=\omega t \qquad \varepsilon=0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=const$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t$$

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Степени свободы и обобщенные координаты

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть однозначно задано положение системы в пространстве.

Положение материальной точки в пространстве определяется значениями трех ее координат (x, y, z). Следовательно, материальная точка имеет три степени свободы.

Положение абсолютно твердого тела в пространстве определяется следующим образом. Находится центр масс абсолютно твердого тела. Любое абсолютно твердое тело можно представить в виде системы материальных точек. Центром масс системы материальных точек называется точка С, радиус-вектор $\mathbf{r_c}$ которой равен

$$\mathbf{r_c} = \frac{1}{\mathrm{m}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_i \mathrm{r}_i$$

n – общее число точек в системе,

m_i и r_i – масса и радиус-вектор i-той материальной точки,

$\mathrm{m} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_i$ - масса всей системы.

Положение абсолютно твердого тела можно определить с помощью координат его центра масс и углов, указывающих ориентацию тела в пространстве.

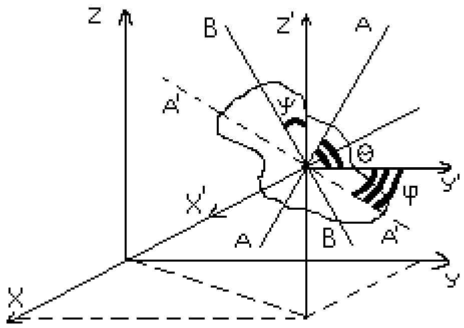


Рис. 10

x, y, z – поступательные степени свободы,

φ, ψ, θ – вращательные степени свободы.

Система из N материальных точек имеет 3N степеней свободы при отсутствии жестких связей между ними.

Каждая жесткая связь между двумя точками уменьшает число степеней свободы на 1.

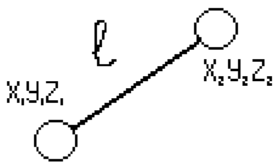


Рис. 11

Координаты жестко связанных точек связаны соотношением

(1) $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=l^2$ (1)

Для определения положения такой системы в пространстве достаточно задать 5 координат, а шестая получается из условия (1).

Пусть две материальные точки связаны между собой упруго. В некотором равновесном положении расстояние между точками равно l_0. Положение такой системы можно задать тремя координатами центра масс, двумя углами и расстоянием l между материальными точками. l – степень свободы колебательного движения.

Материальная точка – 3 степени свободы поступательного движения.

Система двух материальных точек: жесткая связь между точками, составляющими систему – 3 степени свободы поступательного движения и 2 степени свободы вращательного движения.

Упругая связь между точками, составляющими систему – 3 степени свободы поступательного движения, 2 степени свободы вращательного движения и 1 степень свободы колебательного движения.

Абсолютно твердое тело – 3 степени свободы поступательного движения и 3 степени свободы вращательного движения.

Система N материальных точек имеет 3N степеней свободы. Для определения положения системы из N материальных точек в пространстве необходимо задать N радиус-векторов, т.е. 3N величин. Такие величины не обязательно должны быть декартовыми координатами, в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным использование каких-либо других координат, например, полярных.

Любые S величин $q_1, q_2 \; \dots \; q_s$ вполне характеризующие положение системы (с S степенями свободы) называют ее обобщенными координатами, а производные $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ … $\dot{q}_s$ - ее обобщенными скоростями.

Задание обобщенных координат не определяет механического состояния системы в данный момент времени, т.к. не позволяет предсказать положение системы в последующие моменты времени. При заданных значениях координат система может обладать произвольными скоростями. Одновременное задание координат и скоростей полностью определяет состояние системы и позволяет предсказать дальнейшее её движение. Задание q и $\dot{q}$ в некоторый момент времени однозначно определяет и обобщенные ускорения $\ddot{q}$.

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями называются уравнениями движения.

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым принципом наименьшего действия (принцип Гамильтона). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией

$L(q_1, q_2, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t) = L(\mathbf{q}, \dot{q}, t)$, причем движение системы удовлетворяет следующему условию. Пусть в моменты времени t_1 и t_2 система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, что

$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q;\dot{q},t)dt$ имеет наименьшее из всех возможных значений.

L – функция Лагранжа

S – действие.

Это есть принцип наименьшего действия. Если известна функция Лагранжа данной механической системы, то она является уравнением движения данной системы. Из принципа наименьшего действия можно получить уравнение движения (уравнение Лагранжа):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Здесь Q_i - обобщенные силы, действующие на систему.

Если Q_i=0 – система замкнута

$Q_i \neq 0$ – система не замкнута.

Для системы материальных точек

$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$ - $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i)$,

где $\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$ = T – кинетическая энергия системы

$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i)$ – потенциальная энергия системы.

Функция Лагранжа $L = T - U$

Тогда:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-\mathrm{U})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T-\mathrm{U})}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$ - уравнение Лагранжа II рода.

Динамика поступательного движения.

Динамика – раздел механики, в котором изучаются движение механических систем под действием сил. В основе классической механики лежат три закона Ньютона. В качестве первого закона движения Ньютон принял закон инерции.

Тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

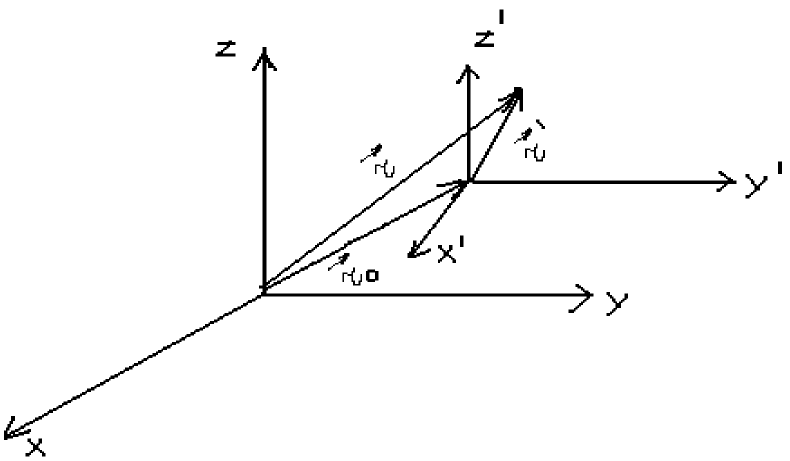
Такое тело называется свободным, а его движение – свободным движением или движением по инерции. Первый закон Ньютона утверждает, что состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое свойство тел – инертность.

Инертность – свойство материального тела, проявляющееся в сохранении движения, совершаемого им при отсутствии действующих сил, и в постепенном изменении этого движения с течением времени, когда на тело начинают действовать силы.

В соответствии с этим первый закон Ньютона называется ещё законом инерции. Любое механическое движение относительно и его характер зависит от выбора системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета.

Системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции называются инерциальными.

Инерциальная система отсчета – система отсчета, по отношению к которой изолированная материальная точка находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Инерциальных систем отсчета существует бесчисленное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно какой-либо инерциальной системы отсчета прямолинейно и равномерно(т.е. с постоянной скоростью), является также инерциальной. Система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной системы отсчета называется неинерциальной.



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

рис. 12

Второй закон Ньютона.

Рассмотрим сначала понятие массы и силы.

Масса тела есть количественная мера инертности тела.

Под инертностью тела понимают свойство тела противиться изменению состояния своего движения под действием внешней силы.

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного тела на другое.

Это действие вызывает изменение скоростей точек тела или его деформацию.

Сила полностью задана, если в каждый момент времени она характеризуется направлением в пространстве, величиной и точкой приложения.

В дальнейшем нам будут необходимы следующие понятия

Внешняя сила – сила, действующая на какую-либо материальную точку механической системы со стороны других материальных точек, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.

Внутренняя сила – сила, действующая на какую либо материальную точку механической системы со стороны других материальных точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе.

Система сил – любая совокупность сил, действующая на механическую систему.

Главный вектор системы сил – величина, равная векторной сумме всех сил системы

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

Второй закон Ньютона устанавливает связь между вектором суммы сил, действующих на тело и ускорением этого тела, приобретаемым под действием этих сил. Ускорение, приобретаемое телом под действием сил, прямо пропорционально сумме сил, действующих на тело.

$\mathbf{a} = \mathrm{k} \sum_i \mathbf{F}_i$, k – коэффициент пропорциональности $\mathrm{k} = \frac{1}{m}$, где m – масса тела. $\mathbf{a} = \frac{1}{m} \sum_i \mathbf{F}_i$, причем под суммой сил, действующих на тело, понимаются внешние силы.($\mathbf{F}^{(e)}$)

$$\mathrm{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^{(e)}; \quad \mathbf{F}^{(e)} = \mathrm{m}\mathbf{a}$$

Учитывая, что $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, имеем

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathrm{m}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

Вектор **P**, равный произведению массы тела на его скорость, называется импульсом тела

$\mathbf{P} = m\mathbf{V}$

Размерность $\dim P = LMT^{-1}$ $\qquad [P] = 1\,\frac{кг \cdot м}{с}$

Следовательно: $\mathbf{F}^{(e)} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$

Скорость изменения импульса материальной точки (твердого тела, механической системы) равна действующей на неё внешней силе.

$\mathbf{F} \cdot dt = d\mathbf{P}$, где величина $\mathbf{F}dt$ – импульс силы. Проинтегрируем:

$$\int_{\mathbf{P}_1}^{\mathbf{P}_2} d\mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt; \qquad \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt$$

Если действует постоянная во времени сила, то

$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$.

Теорема о движении центра масс.

В классической механике масса не зависит от скорости и, следовательно, импульс механической системы $\mathbf{p} = m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v} + \ldots$ может быть выражен через скорость её центра масс.

Центром масс, или центром инерции механической системы называется такая воображаемая точка, радиус-вектор которой выражается через радиусы-векторы материальных точек по формуле:

$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots}{m}$, где $m = m_1 + m_2 + \ldots$ - масса всей системы.

Возьмем производную по времени

$m\dot{\mathbf{r}}_c = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots$

$m\mathbf{v}_c = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots$

Здесь $\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c$ - скорость центра масс системы.

Следовательно:

$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v}_c$ или $m\dfrac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}$

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила – геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Третий закон Ньютона.

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Если тело 2 действует на тело 1 с силой $\mathbf{F}_{12}$, то тело 1 в свою очередь действует на тело 2 с силой $\mathbf{F}_{21}$.

Третий закон Ньютона утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей центры масс этих тел.

$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$

Закон сохранения импульса.

Механическая система, на которую не действуют внешние силы, или действие внешних сил скомпенсировано, называется замкнутой. Рассмотрим механическую систему, состоящую, например, из 3-х тел. (рис. 13) Первое тело действует на 2-у с силой $\mathbf{F}_{12}$, на третье – с силой $\mathbf{F}_{13}$.Второе тело действует на первое с силой $\mathbf{F}_{21}$, на третье – с силой $\mathbf{F}_{23}$. Третье тело действует на первое с силой $\mathbf{F}_{31}$, на второе – с силой $\mathbf{F}_{32}$. Кроме того на тела системы действуют внешние силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ соответственно. Запишем уравнения движения для каждого тела системы.

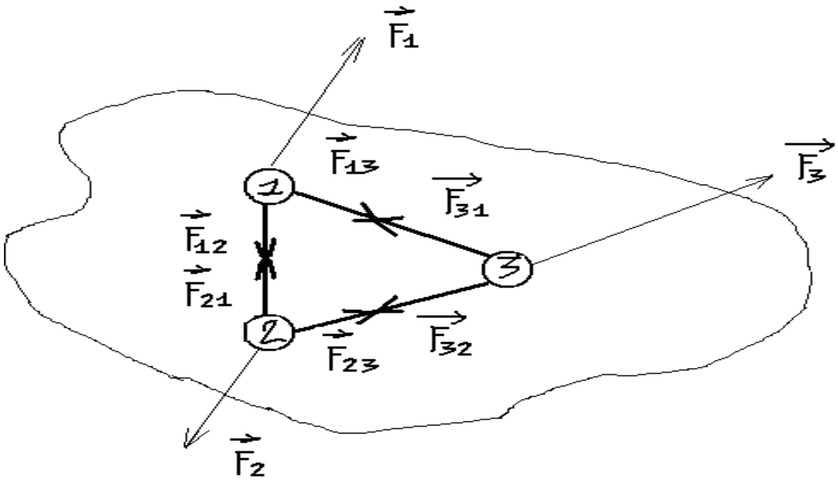


рис. 13

$\dot{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_1$

$\dot{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_2$

$\dot{\mathbf{P}}_3 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_3$

Сложим все эти уравнения

$\dot{\mathbf{P}}_1 + \dot{\mathbf{P}}_2 + \dot{\mathbf{P}}_3 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 =$

$= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$, т.к. сумма всех внутренних сил, действующих в механической системе всегда равна 0 (по третьему закону Ньютона).

Полный импульс механической системы равен сумме импульсов тел, составляющих систему.

$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$

Продифференцируем: $\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}}_1 + \dot{\mathbf{P}}_2 + \dot{\mathbf{P}}_3$

$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \sum_i \mathbf{F}_i$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Производная по времени от суммарного импульса механической системы равна сумме всех внешних сил, действующих на данную механическую систему.

Если система замкнута, то $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ и, следовательно $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ или

$\mathbf{P}$ = const.

Если геометрическая сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то импульс механической системы сохраняется, т.е. не меняется со временем.

Закон сохранения импульса для механических систем является фундаментальным законом природы, не знающим никаких исключений.

В проекциях на оси координат закон сохранения импульса можно записать следующим образом

$$\sum_i \mathbf{P}_{ix} = \text{const}$$

$$\sum_i \mathbf{P}_{iy} = \text{const}$$

$$\sum_i \mathbf{P}_{iz} = \text{const}$$

Пусть $\mathbf{F}^{(e)} \neq 0$, но равна нулю проекция $\mathbf{F}^{(e)}$ на какое-либо направление, например на X. Тогда для этой проекции $\frac{d\mathbf{P}_x}{dt} = 0$ и следовательно P_X = const. Таким образом полный импульс системы не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление X.

Импульс механической системы может быть представлен в виде произведения суммарной массы частиц, составляющих систему, на скорость центра масс системы

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V}_c$$

$$\mathbf{V}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \mathbf{V}_i}{m} = \frac{\mathbf{P}}{m}$$

Для замкнутой системы $\mathbf{P} = m\mathbf{V}_c$ = const. Следовательно, центр масс замкнутой системы либо движется равномерно и прямолинейно, либо остаётся неподвижным.

Работа и механическая энергия.

В качестве единой количественной меры различных форм движения материи и соответствующих им взаимодействий в физике вводится скалярная величина, называемая энергией. Энергия является общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Различным видам движения и взаимодействия материи соответствуют разные виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и другие. В разделе «Механика» рассматриваются только кинетическая и потенциальная энергия.

Кинетическая энергия Т – энергия механического движения тела, частицы, системы тел. Определяется массами и скоростями рассматриваемых тел. (Энергия движения).

Потенциальная энергия П механической системы – энергия, зависящая только от взаимного расположения частиц системы и от положения их во внешнем потенциальном поле. (Энергия положения).

Изменение механического движения тела, его положения во внешнем потенциальном поле происходит в процессе механического действия на тело со стороны других тел.

Для количественного описания процесса изменения механической энергии в механике существует понятие работы силы.

Элементарная работа силы dA – скалярная мера действия силы, равная скалярному произведению силы **F** на элементарное перемещение точки её приложения d**r**

$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = F\cos\alpha\, dr = Fdr\cos\alpha$, где α – угол между векторами **F** и d**r**.

Учитывая, что $\mathbf{V} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ элементарную работу можно записать:

$dA = \mathbf{F}\mathbf{V}dt$.

$F \cos\alpha = F_r$; $dr \cos\alpha = dr_F$

$$dA = F_r\ dr = F\ dr_F$$

Работа силы на конечном перемещении А – величина, равная криволинейному интегралу от элементарной работы силы, взятому вдоль дуги кривой, описанной точкой приложения силы при этом перемещении.

$$A = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{r} \qquad (1)$$

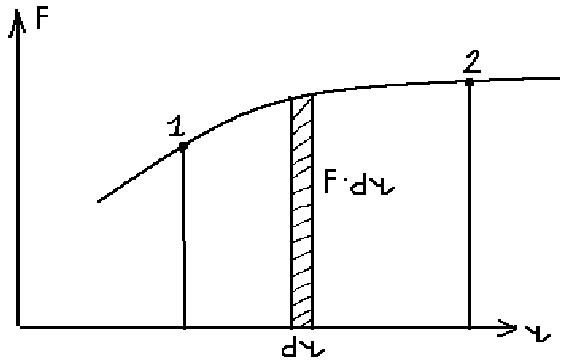


рис. 14

Работа, совершаемая силой **F** на конечном перемещении точки из положения 1 в положение 2, равна сумме элементарных работ на малых участках dr, в пределах которого силу можно считать постоянной. Если сложить все эти элементарные работы и перейти к пределу при $dr \to 0$, и их число $к \to \infty$, то придем к формуле (1).

Работа, совершаемая за промежуток времени от t_1 до t_2, может быть вычислена по формуле.

$$A = \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{F}\mathbf{v}dt$$

Размерность работы: $\dim A = L^2MT^{-2}$. Единица работы [A]=1Н·м=1Дж

Джоуль равен работе силы в 1Н, перемещающей тело на расстояние 1м в направление действия силы.

Сила не совершает работы в двух случаях:

1. Точка приложения силы неподвижна, то есть dr=0.

2. Угол $\alpha=\pm\frac{\Pi}{2}$, то есть линия действия силы перпендикулярна перемещению.

Пусть на материальную точку (механическую систему) действуют несколько сил. Их работа на перемещении d**r**:

$dA=(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+\ldots)d\mathbf{r}=\mathbf{F}_1 d\mathbf{r}+\mathbf{F}_2 d\mathbf{r}+\ldots=dA_1+dA_2+\ldots$

Работа суммы нескольких сил, действующих одновременно на материальную точку (механическую систему), равна сумме элементарных работ этих сил. Это справедливо и для работ на конечных перемещениях.

$A=A_1+A_2+\ldots$

Мощность силы (мощность) P – величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки её приложения.

$P=\mathbf{F}\mathbf{v}=F\cdot\cos\alpha\cdot v=F\cdot v\cdot\cos\alpha$, где α – угол между векторами **F** и **v**

Мощность можно также определить как первую производную работы по времени.

$P=\frac{dA}{dt}$

Размерность мощности $\dim P = L^2MT^{-3}$. Единица мощности [P]=1Дж/с=1Вт

1 Ватт равен мощности, при которой работа 1 Дж совершается за время 1с.

Внесистемная единица мощности 1 лошадиная сила=735,499Вт.

Кинетическая энергия.

Придадим формуле работы силы на конечном перемещении вид $A=\int_L \mathbf{F}d\mathbf{r}=\int\frac{d\mathbf{P}}{dt}\mathbf{v}dt=\int\mathbf{v}d\mathbf{P}$

$A=\int\mathbf{v}d\mathbf{P}$, причём d**P**=d(m**v**)=md**v**, следовательно: $A=\int m\mathbf{v}d\mathbf{v}$.

Пусть в результате действия силы **F** скорость материальной точки изменилась от **v** до **v**+d**v**, получив приращение d**v**. Посчитаем работу, совершенную этой силой.

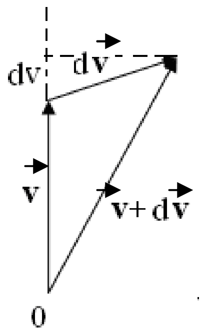


рис. 15

Но d**v**≠dv. Однако, учитывая свойства скалярного произведения $\mathbf{v}^2 = v^2$.

Продифференцируем обе части этого уравнения.

$d(\mathbf{v}^2) = d(v^2)$; или **v**d**v**=vdv.

Следовательно: $A=\int m\mathbf{v}d\mathbf{v}=\int mvdv= m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$.

Величина $T=\frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{P^2}{2m}$ называется кинетической энергией.

$A=T_2 - T_1$, то есть работа силы при перемещении материальной точки равна приращению (или изменению) кинетической энергии этой точки.

Учитывая, что кинетическая энергия величина аддитивная, то есть кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит. Следовательно, работа всех сил, действующих на механическую систему, равна приращению кинетической энергии этой системы.

Связь между кинетическими энергиями в различных системах отсчета. Теорема Кёнига.

Рассмотрим, как преобразуется кинетическая энергия при переходе из одной системы отсчета к другой.

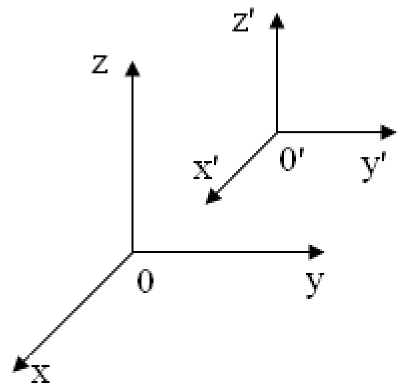


рис. 16

Пусть T - кинетическая энергия материальной точки в системе отсчета O.

T′ - кинетическая энергия материальной точки в системе O′, движущейся относительно системы отсчета O со скоростью $\mathbf{v_0}$.

Скорости связаны между собой соотношением:

$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v'}$ (возведём в квадрат и разделим на $\frac{m}{2}$).

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m v'^2 + m\,\mathbf{v'}\mathbf{v_0}$$

Здесь: $\mathbf{v}_0^2 = v_0^2; \mathbf{v}'^2 = v'^2$

Или $T = T' + \frac{1}{2} m v_0^2 + \mathbf{P'}\,\mathbf{v_0}$

Для системы материальных точек

$\mathbf{P'} = m_1 \mathbf{v_1'} + m_2 \mathbf{v_2'} + \ldots = m\mathbf{v'_c}$,

где $\mathbf{v'_c}$ - скорость центра масс системы материальных точек относительно O′.

Следовательно: $T = T' + \frac{1}{2} m v_0^2 + m(\mathbf{v_c}\mathbf{v_0})$

Если центр масс покоится в системе отсчета O′, то $\mathbf{v'_c} = 0$.

Следовательно:

$$T = T' + \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (2)$$

Формула (2) выражает **теорему Кёнига**.

Кинетическая энергия системы материальных точек (механической системы) равна сумме кинетической энергии всей массы системы, сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним и кинетической энергии той же системы в её относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчёта с началом в центре масс.

Консервативные силы. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Кроме взаимодействий, возникающих между соприкасающимися телами, в природе наблюдаются взаимодействия между телами, удалёнными друг от друга. Подобные взаимодействия осуществляются посредством физических полей.

Различают гравитационное, электромагнитное поля. Каждое тело создает в окружающем его пространстве особое состояние, называемое силовым полем.

Силовое поле – область пространства, в которой на помещенную материальную точку действует сила, зависящая от координат этой точки в рассматриваемой системе отсчёта и от времени. Например, в гравитационном поле Земли в каждой точке на тело массы m действует сила m**g**. Поле называется центральным, если сила действует на тела по линии, соединяющей их центры, а величина силы зависит только от расстояния **F=F**(**r**).

Стационарное силовое поле - силовое поле, в котором действующие силы не зависят от времени.

Однородное силовое поле - силовое поле, в любой точке которого сила поля для данной материальной точки имеет одно и то же значение.

Если для стационарного поля работа, совершаемая над материальной точкой силами поля, зависит лишь от начального и конечного положения материальной точки и не зависит от пути по которому она двигалась, то силы, обладающие таким свойством, называются консервативными. Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю.

Работу консервативных сил можно представить в виде разности значений некоторой функции состояния системы П такой, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 будет определять работу сил при переходе материальной точки из положения 1 в положение 2.

Поле называется потенциальным, если его можно описать с помощью функции П=П(x,y,z,t), градиент которой определяет силу в каждой точке поля:

$\mathbf{F}=-\mathrm{grad}\Pi$.

В этом случае функция П(x,y,z,t) называется потенциальной функцией или потенциалом. Если поле стационарное, то потенциальная функция есть потенциальная энергия материальной частицы.

Работа консервативных сил:

$A_{12}=\Pi(1)-\Pi(2)=-d\,\Pi(x,y,z)$.

В каждой конкретной задаче для получения однозначной зависимости потенциальной энергии рассматриваемой механической системы от её состояния, выбирают такое нулевое состояние, в котором потенциальную энергию полагают равной нулю.

$d\,A=-\,d\,\Pi=F_x\,dx$

$$F_x=-\frac{d\,\Pi}{dx}$$

$$dA=\mathbf{F}d\mathbf{r}=F_x\,dx+F_y dy+F_z dz=-\left[\frac{\partial\Pi_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\Pi_y}{\partial y}dy+\frac{\partial\Pi_z}{\partial z}dz\right]$$

При этом:

$$F_x=-\frac{\partial \Pi_x}{\partial x};F_y=-\frac{\partial \Pi_y}{\partial y};F_z=-\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{F}=-[\frac{\partial \Pi_x}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial \Pi_y}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\mathbf{e}_z]$$

$\mathbf{F}$=-gradП; $\mathbf{F}=-\nabla\Pi$

Где $grad(\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$

Рассмотрим примеры расчёта потенциальной энергии.

1) Потенциальная энергия материальной точки (твердого тела в однородном поле тяжести).

Пусть сила, действующая на материальную точку, направлена по оси z.

$\mathbf{F}=F_z\mathbf{e_z}$

$d\Pi=-dA=-F_z\,dz$

$\Pi(z)-\Pi(0)=-\int_0^z F_z dz=-F_z z$

$\Pi(z)=-F_z\,z+\Pi(0)$

Для материальной точки, находящейся в однородном поле тяжести Земли

$F_z=-mg$ Следовательно, полагая $\Pi(0)=0$ имеем

$\Pi(z)=\Pi(h)=mgh$

Если $\Pi(0)=h_1$, то

$\Pi(h)=mg(h_2-h_1)$.

2) Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Рассмотрим сначала упругие силы и закон Гука.

Упругие силы. Закон Гука.

При действии внешних сил в телах возникают деформации (т.е. изменение размеров и формы) тел. Если после прекращения действия внешних сил тела восстанавливают прежние формы и размеры, то такая деформация называется упругой.

Деформация будет упругой, если внешняя сила не превосходит предела упругости. При превышении предела упругости деформация становится пластической. В этом случае после устранения внешних воздействий первоначальные форма и размеры тела не восстанавливаются. В деформированном теле возникают упругие силы, которые уравновешивают внешние силы, вызывающие деформации.

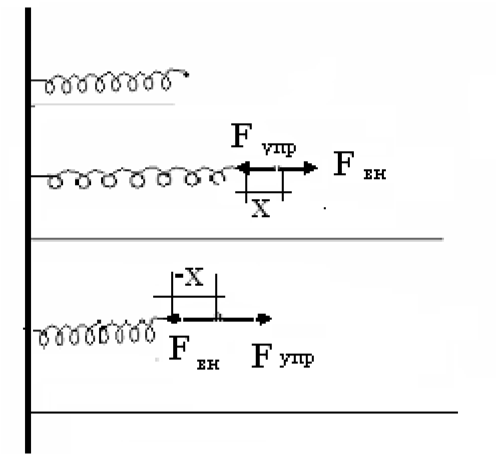


рис. 17

При действии внешней силы $F_{вн}$ пружина получает удлинение x, при этом в пружине возникает упругая сила $F_{упр}$, которая уравновешивает внешнюю силу.

Экспериментально установлено, что при упругой деформации удлинение пропорционально внешней силе - закон Гука.

$x = \frac{1}{k} F_{вн}$, где k- жесткость пружины.

$F_{вн} = -F_{упр}$

Следовательно:

$$x = -\frac{1}{k} F_{упр}$$

$$F_{упр} = -kx$$

Однородные стержни ведут себя при растяжении и одностороннем сжатии подобно пружине. Деформации приводят к возникновению в стержне упругих сил. Эти силы характеризуют напряжением σ:

$\sigma = \dfrac{F_{упр}}{S}$, где S-площадь поперечного сечения стержня.

Из опыта известно, что

приращение длины стержня:

$$\Delta\ell = \frac{1}{k}\sigma$$

$$k = \frac{E}{\ell_0}$$

где E – модуль Юнга (модуль упругости)

Тогда: $\Delta\ell = \dfrac{\ell_0\sigma}{E}$

Обозначим $\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0} = \varepsilon$

$\varepsilon = \dfrac{1}{E}\sigma$ - закон Гука для однородных стержней.

Модуль Юнга численно равен тому напряжению, которое растягивает стержень вдвое.

Пусть к стержню длиной ℓ_0 приложено напряжение σ и длина его станет

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell$$

$$\Delta\ell = \frac{\ell_0\sigma}{E}$$

Тогда $\ell = \ell_0(1 + \dfrac{\sigma}{E})$

Сила приложенная к стержню:

$$F = E \cdot S \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Во время деформации сила не остается постоянной, а меняется линейно. При растяжении или сжатии стержней внешние силы совершают работу. Пусть длина стержня меняется от ℓ до $\ell + \Delta\ell$, при этом внешние силы совершают работу:

$A = \mathbf{F}\Delta\ell$, где **F** – среднее значение силы.

При $\Delta\ell$=0 F=0, при данном $\Delta\ell$ $F = \frac{ES}{L}\Delta\ell$, тогда

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\frac{ES}{L}\Delta\ell$$

и работа:

$$A = \frac{1}{2}\frac{ES}{L}(\Delta\ell)^2$$

Эта работа представляет собой потенциальную энергию упруго-деформированного стержня. Деформация продольного растяжения или сжатия сопровождается изменением поперечных размеров деформируемого стержня. При продольном растяжении стержень даёт поперечное сжатие, при продольном сжатии – выпучивание.

Относительное изменение толщины стержня $\frac{\Delta d}{d}$ пропорционально действующему напряжению:

$$\frac{\Delta d}{d} = \beta\sigma$$

β – коэффициент поперечного сжатия при продольном растяжении.

Рассмотрим деформацию сдвига. Пусть прямоугольный брусок закреплен нижней гранью:

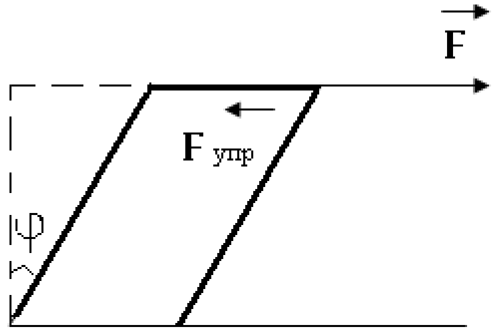


рис. 18

Под действием силы F, приложенной к верхней грани, брусок получает деформацию, называемою сдвигом. Величина $\gamma=tg\varphi$ называется относительным сдвигом. При упругих деформациях угол φ мал, поэтому $tg\varphi\approx \varphi$, следовательно

$$\gamma=tg\varphi\approx \varphi$$

Деформации сдвига приводят к возникновению в каждой точке бруска тангенциального упругого напряжения τ.

$$\tau = \frac{F_{упр}}{S}$$

Из опыта известно, что

$$\gamma=\frac{1}{G}\tau$$

где G- модуль сдвига.

Всякое твёрдое тело даёт деформацию, подчиняющуюся закону Гука, т.е. упругие деформации в теле возникают до известного предела σ_e, который носит название предела упругости.

При изменении σ от 0 до предела упругости σ_e относительная деформация растёт линейно – это область упругой деформации (0а).

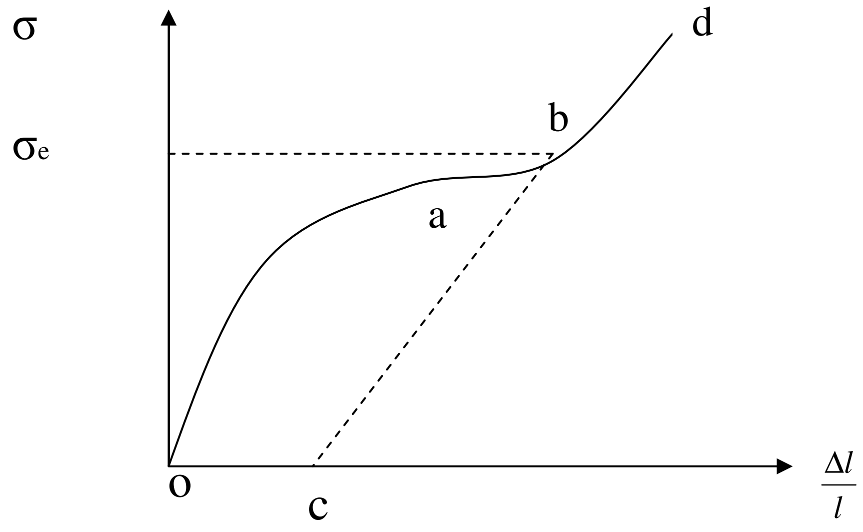


рис. 19

Область ab – относится еще к упругой деформации, но уже есть отступления от закона Гука. Если в точке b снять напряжение, то в исходное состояние стержень не вернется, а пойдет по прямой bc и в нем появятся остаточные деформации ОС. За т. b удлинение может вырастать и без увеличения нагрузки – это область текучести. Точка d – точка разрыва (предел прочности).

При продольном растяжении или сжатии тел (например, вдоль оси x) выполняется закон Гука:

$$\mathbf{F}=-kx\mathbf{ex}$$

Тогда $d\Pi = kxdx$

$\Pi(x) = k\int_0^x xdx = \dfrac{kx^2}{2}$ - потенциальная энергия упруго деформированного тела

3. Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек.

Рассмотрим сначала законы Кеплера и закон всемирного тяготения. Кеплер эмпирически установил три закона планетных движений:

1) Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2) Радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади.

3) Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Из первого закона следует, что траектория планеты – плоская кривая. Из второго закона – сила, заставляющая планету двигаться по замкнутым орбитам, направлена к Солнцу. Определим, как эта сила меняется с изменением расстояния до Солнца и как зависит от массы планеты. Предположим, что планета движется по круговой орбите, в центре которой находится Солнце. В этом случае ее ускорение

$$a_r = -\omega^2 r = -\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Из третьего закона:

$$T_1^2 : T_2^2 : T_3^2 : \ldots = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3 : \ldots$$

Или $\frac{r^3}{T^2} = k$

k – постоянная для всех планет Солнечной системы – постоянная Кеплера.

$$k = \frac{a^3}{T^2}$$

где a – длина большой полуоси орбиты.

Тогда: $a_r = -\frac{4\pi^2 k}{r^2}$

И сила, действующая на планету

$$F = -\frac{4\pi^2 k}{r^2} m$$

Коэффициент $4\pi^2 k$ один и тот же для всех планет и не зависит от массы планеты. Т.к. планеты движутся по замкнутым орбитам под действием сил со стороны Солнца, то эти силы пропорциональны и массе планет и массе Солнца. Следовательно:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Постоянная Кеплера

$$k = \frac{GM}{4\pi^2}$$

где М – масса Солнца G – гравитационная постоянная

$$G = 6{,}67 * 10^{-11}\frac{н^2 м^2}{кг^2}$$

Отсюда Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения:

Две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягивают друг друга с силой, пропорциональной произведению масс этих точек и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними и действует по линии, соединяющей их центры.

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1 * m_2}{r^2}\ \frac{r}{\mathrm{r}}$$

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля. Характеристикой гравитационного поля является векторная величина, которая называется напряженностью гравитационного поля

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

На тело, помещенное в гравитационное поле Земли, действует сила:

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_\mathbf{r}$$

Следовательно, напряженность гравитационного поля Земли в точке, отстоящей на расстоянии r от Земли

$$\mathbf{g} = -G\frac{M}{r^2}\mathbf{e_r}$$

Будем считать Землю неподвижной и посчитаем работу, которую совершают гравитационные силы при перемещении материальной точки массы m из из бесконечности в данную точку поля. Эта работа есть убыль потенциальной энергии.

$$A = \Pi(\infty) - \Pi(r) = \int_0^{\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{r}$$

Обычно $\Pi(\infty) = 0$, следовательно:

$\Pi(r) = -G\frac{Mm}{r}$ - потенциальная энергия материальной точки массы m в гравитационном поле Земли.

Скалярная величина $\varphi = \frac{\Pi(r)}{m} = -G\frac{M}{r}$ называется потенциалом гравитационного поля.

Найдем зависимость между напряженностью и потенциалом гравитационного поля:

$F = -grad\Pi$; $m\mathbf{g} = -\mathrm{grad}(m\varphi)$

Учитывая, что $\Pi = -G\frac{Mm}{r} = m\varphi$,

имеем:

$$\mathbf{g} = -\mathrm{grad}\varphi.$$

Учитывая, что вблизи поверхности Земли $\Pi = mgh$ имеем:

$$m\varphi = \Pi = mgh; \quad \varphi = gh.$$

Закон сохранения механической энергии.

Закон сохранения механической энергии выполняется в замкнутых системах, в которых действует консервативные силы.

Пусть имеем замкнутую механическую систему и на тело в этой системе действуют консервативные силы. Под действием этих сил тело перемещается и, следовательно, совершается работа. Раз совершается работа, происходит изменение кинетической энергии тела.

$$dA = dT = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

При перемещении изменяется и положение тела, следовательно изменяется потенциальная энергия тела.

$dA = -d\Pi$

(происходит уменьшение потенциальной энергии)

Отсюда:

$dA = dT = -d\Pi$

$d(T - \Pi) = 0$, следовательно

$$T + \Pi = \text{const}$$

В замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, механическая энергия – величина постоянная.

Пусть на тело (материальную точку) кроме консервативных сил действует также неконсервативная сила **F***. При переходе из положения 1 в положение 2 над телом будет совершаться работа:

$$A = \int_1^2 Fdr + \int_1^2 F^* dr = A_k + A^*$$

Работу консервативных сил можно представить как убыль потенциальной энергии

$$A = П_1 – П_2 + A^*$$

С другой стороны суммарная работа всех приложенных сил к телу идет на приращение кинетической энергии тела:

$$T_1 - T_2 = П_1 – П_2 + A^*$$

Учитывая, что П + Т = Е имеем:

$$(П_2 + T_2) – (T_1 – П_1) = A^*$$

$$E_2 – E_1 = A^*$$

Если в системе действуют, например, силы трения, то часть механической энергии идет на преодоление этих сил, и при этом происходит рассеяние (диссипация) энергии. Механическая энергия частично превращается во внутреннюю.

Соударение тел. Применение закона сохранения энергии и закона сохранения импульса к абсолютно упругому и абсолютно неупругому удару.

При соударении тел друг с другом они испытывают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно не упругий.

Абсолютно упругий удар – это такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. Кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем потенциальная энергия упругой деформации переходит в кинетическую энергию, а тела разлетаются со скоростями, направление и модули которых определяются двумя условиями: законом сохранения полной энергии и законом сохранения полного импульса системы тел.

Абсолютно неупругий удар – потенциальная энергия упругой деформации не возникает, кинетическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию. После удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно упругом ударе сохраняется закон сохранения импульса и закон сохранения полной энергии.

а) **Абсолютно неупругий удар.**

Пусть два тела m_1 и m_2 имеют скорости до удара $\mathbf{v}_{10}$ и $\mathbf{v}_{20}$. По закону сохранения импульса

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\,\mathbf{v}_{20} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}$$

Отсюда $$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2\ v_{20}}{m_1 + m_2}$$

Для нахождения направления скорости движения это выражение проектируют на выбранное направление и производят необходимые расчеты.

б) **Абсолютно упругий удар.**

Рассмотрим центральный удар. Удар называется центральным, если тела движутся по прямой, соединяющей их центры. При центральном ударе соударение может произойти, если:

1) шары движутся навстречу друг другу

2) один из шаров догоняет другой

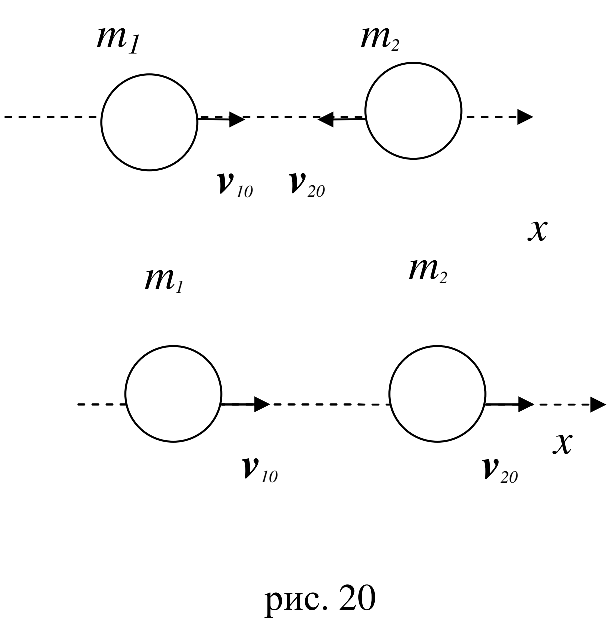


рис. 20

Пусть система замкнута и вращение шаров отсутствует.

Из закона сохранения энергии и импульса имеем:

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \qquad (1)$$

$$m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \qquad (2)$$

Уравнение (1) можно привести к виду:

$$m_1(v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1) = m_2(v_{20} - v_2)(v_{20} + v_2) \qquad (3)$$

Уравнение (2):

$$m_1(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 - v_{20}) \qquad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4) имеем:

$$v_{10} + v_1 = v_{20} + v_2 \qquad (5)$$

Умножаем (5) на m_2 и вычитаем из (4), а затем умножаем (5) на m_1 и сложим с (4) и получим скорости шаров после удара:

$$v_1 = \frac{2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2) v_{10}}{m_1 + m_2} \qquad (6)$$

$$v_2 = \frac{2m_1 v_{10} + (m_2 - m_1) v_{20}}{m_1 + m_2} \qquad (7)$$

Для численных расчетов (6) и (7) проектируют на выбранную ось x, вдоль которой движутся шары и производят необходимые вычисления.

Динамика вращательного движения. Динамические характеристики вращательного движения.

При рассмотрении вращения тела с динамической точки зрения понятие о силе заменяется понятием о моментах силы (т.е. когда действие силы определено не только величиной силы, но и расположением точки ее приложения) и понятие о массе тела заменяется понятием о моменте инерции (т.е. когда ускорение вращающегося тела зависит не только от его массы, но и от распределения масс относительно оси вращения).

Момент силы относительно точки О – величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из данной точки в точку приложения силы, на эту силу.

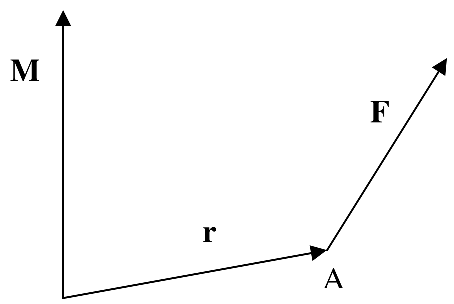


рис. 21

$$\mathbf{M} = [\,\mathbf{rF}\,]$$

Из этого определения следует, что момент **M** не изменится, если точку приложения силы **F** перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы. Если точку приложения силы перенести в т.A′, то параллелограмм OABC перейдет в параллелограмм OA′B′C. Их площади равны, т.к. они имеют общее основание OC и одинаковую высоту и, следовательно, их площади равны.

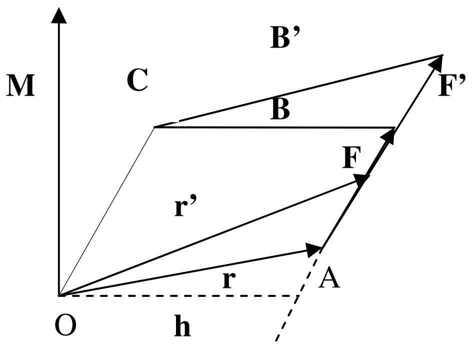


рис. 22

Если $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, то $[\,\mathbf{rF}] = [\mathbf{rF_1}] + [\mathbf{rF_2}]$ т.е. момент равнодействующей двух или нескольких сил относительно некоторой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Модуль момента силы:

$$M = rF\sin(\widehat{rF})$$

M = h F
h – плечо силы, кратчайшее расстояние до линии действия силы.

Размерность момента силы

$\dim M = L^2MT^{-2}$. Единица момента силы [M] = 1H*м

Направление момента силы определяется по правилу правого буравчика. Вектора **M**, **r**, **F** составляют правую тройку векторов.

Вращающие моменты могут создавать лишь внешние силы. Сумма моментов всех внутренних сил, действующих между точками тела, равно нулю, т.к. любая пара частиц действует друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению.

Момент силы относительно оси – величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно любой точки оси. Из этого определения следует, что момент силы относительно оси есть величина скалярная. Ее размерность и единица те же, что и момента силы относительно точки.

Момент инерции механической системы относительно оси (динамический момент инерции) J – равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний до данной оси

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Физический смысл. Момент инерции механической системы относительно оси является мерой инертности тела при его вращении вокруг этой оси.

Для одной материальной точки:

$$J = mr^2$$

Размерность и единица момента инерции:

$\dim J = L^2 M$ [J] = 1 кг*м^2

Теорема Гюйгенса – Штейнера.

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей.

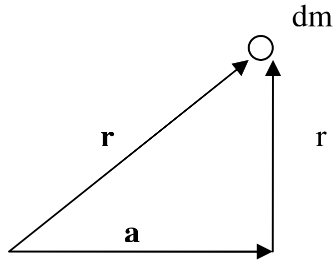


рис. 23

Пусть dm – элементарные массы, на которые разбито тело. Из рис.21 имеем:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$$

Возведем в квадрат и учитывая свойства скалярного произведения:

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar$$

Умножим на dm и проинтегрируем:

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\mathbf{a}\int \mathbf{r} dm$$

$$\int r'^2 dm = \mathrm{I}_A \text{ , } \int r^2 dm = \mathrm{I}_0 \text{ , } \int \mathbf{r} dm = m\mathbf{r_c}$$

$\mathbf{r_c}$ - радиус-вектор центра масс тела относительно оси O.

Следовательно:

$$\mathrm{I}_A = \mathrm{I}_0 + ma^2 - 2m\mathbf{a}\mathbf{r_c}$$

Пусть ось O проходит через центр масс тела. Следовательно, $\mathbf{r_c} = 0$

$$\mathrm{I}_A = \mathrm{I}_0 + ma^2$$

Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где a - расстояние между осями.

Примеры вычисления моментов инерции.

Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно или вычислить, или найти экспериментально. Если тело однородно, т.е. ρ = const, и масса распределена непрерывно по объему, то вычисление момента инерции тела сводится к вычислению интеграла

$$\mathrm{I} = \int r^2 dm \text{ ,}$$

где r – расстояние от элемента массы dm, на которые разбито тело, до оси вращения. Интегрирование должно производиться по всей массе тела. Аналитически такие интегралы можно вычислить только для тел правильной геометрической формы, для тел неправильной геометрической формы такие интегралы могут быть найдены только численно. Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения подобия и симметрии и теорему Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции тела можно представить как $\mathrm{I} = kml^2$, где l – какой-либо характерный размер тела или расстояние какой-либо характерной точки этого тела от оси вращения. Коэффициент пропорциональности k зависит только от формы тела и его расположения относительно оси вращения.

Введем одно вспомогательное понятие.

Моментом инерции тела относительно точки О называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадраты их расстояний до точки О.

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N} mR^2$$

При непрерывном распределении масс $\Theta = \int R^2 dm$

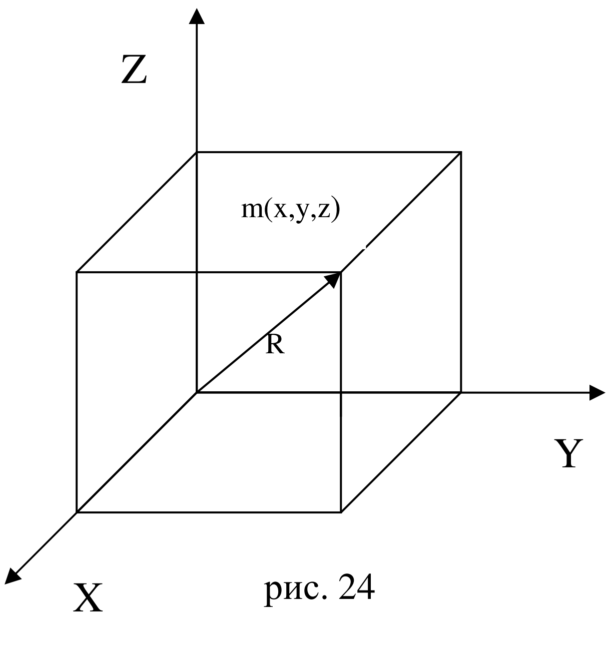


рис. 24

Рассмотрим материальную точку с массой m и координатам x, y, z относительно прямоугольной системы координат. Квадраты расстояний ее до осей X, Y, Z равны соответственно (y^2+z^2), (x^2+z^2), (x^2+y^2), а моменты инерции относительно тех же осей:

$I_x = m(y^2+z^2)$, $I_y = m(x^2+z^2)$, $I_z = m(x^2+y^2)$

Сложим эти равенства:

$I_x+I_y+I_z = 2m(x^2+y^2+z^2)$

$x^2+y^2+z^2 = R^2$, следовательно:

$I_x+I_y+I_z = 2m\,R^2 = 2\Theta$

Сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке О, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.

Если повернуть координатные оси относительно тела, оставляя углы между ними прямые, то моменты инерции I_x, I_y, I_z не изменятся и их сумма останется той же.

Сумма моментов инерции I_x, I_y, I_z относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей.

Для плоского распределения масс (для пластинок произвольной формы с произвольным распределением вещества по ее объему)

$I_x+I_y = I_z$

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно перпендикулярной оси.

Пусть ось проходит через один из концов стержня (ось А).Пусть длина стержня l, центр стержня С – является его центром масс. По теореме Гюйгенса-Штейнера имеем: $I_A = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$

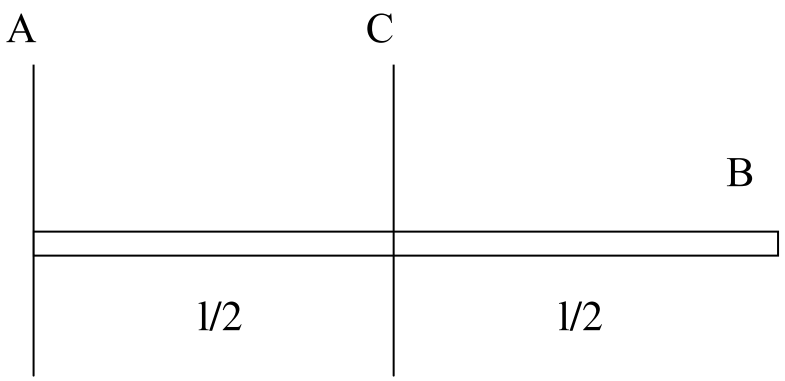


рис. 25

Момент инерции относительно оси С I_C представим как сумму моментов инерции двух стержней АС и СВ.

Момент инерции относительно осей AC и CB соответственно равен $I_{CB} = I_{AC} = k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$.

Следовательно: $I_C = I_{AC} + I_{CB} = km\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$kml^2 = km\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$

Отсюда $k = 1/3$. Тогда моменты инерции стержня относительно осей A и C соответственно равны:

$I_A = \frac{1}{3}ml^2$

$I_C = \frac{1}{12}ml^2$.

Момент инерции однородной прямоугольной пластины и однородного прямоугольного параллелепипеда.

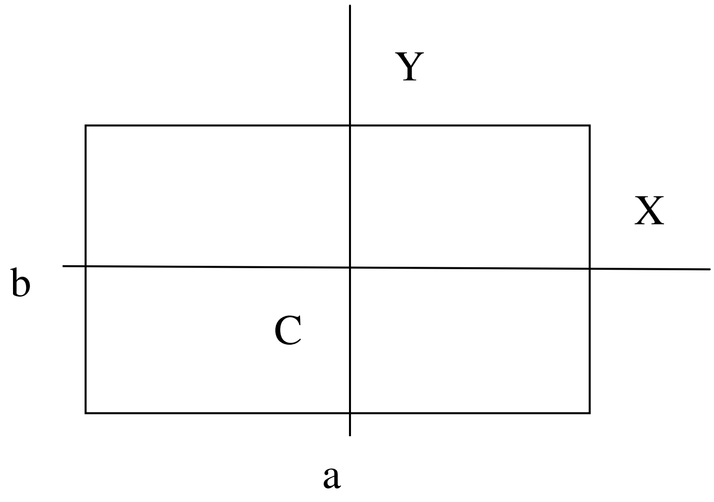


рис.26

Пусть координатные оси проходят через центр пластинки и параллельно ее сторонам. Пусть все вещество пластинки смещено параллельно оси X и сконцентрировано на оси Y или смещено параллельно оси Y и сконцентрировано на оси X. В результате смещения пластинка перейдет в тонкий стержень и, следовательно, моменты энергии тонкого стержня относительно осей Y и X соответственно равны:

$I_y = \frac{1}{12}ma^2$; $I_x = \frac{1}{12}mb^2$

Тогда, учитывая, что $I_z = I_x + I_y$, момент инерции пластинки относительно оси z:

$$I_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right).$$

Эта формула пригодна также для вычисления направления моментов инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его геометрических осей. Для этого необходимо сжимать параллелепипед в пластинку вдоль его геометрических осей.

в) Момент инерции тонкого круглого кольца (окружности).

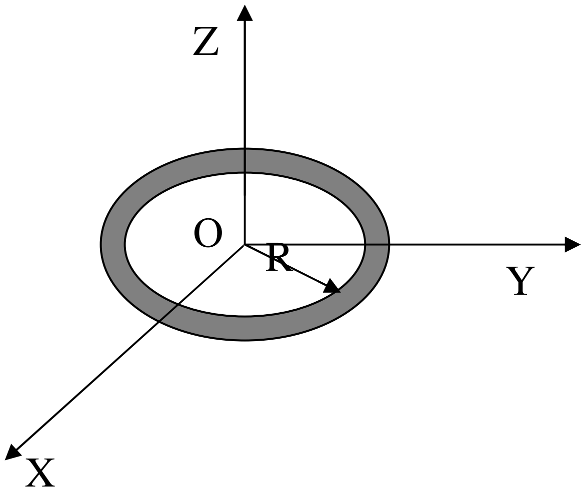


рис. 27

Момент инерции тонкого кольца относительно оси Z.

$$I_z = mR^2 \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$I_x + I_y = I_z \qquad \text{и} \qquad I_x = I_y$$

имеем:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2$$

Формула (1) даёт также момент инерции полого однородного цилиндра с бесконечно тонкими стенками относительно его геометрической оси.

Момент инерции бесконечно тонкого диска и сплошного цилиндра.

Предполагаем, что диск и цилиндр однородны. Пусть ось Z проходит через центр диска C перпендикулярно его плоскости.

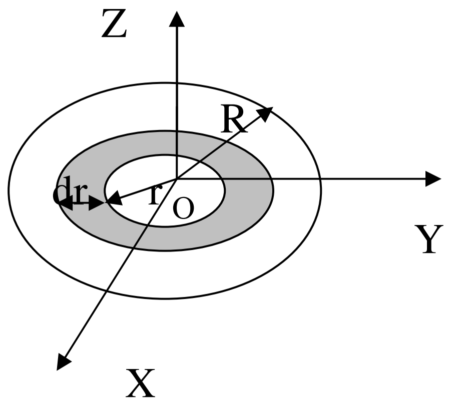


рис. 28

Выделим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом r и наружным r+dr. Площадь тонкого кольца $dS=2\pi rdr$. Его момент инерции относительно оси Z

$$dI_z = r^2 dm$$

Момент инерции всего диска

$$I_z = \int r^2 dm.$$

$$m = \rho \cdot v;$$

$$dm = \rho \cdot dv = \frac{m}{v} dv = \frac{mhdS}{hS} = m\frac{dS}{S},$$

$$dm = m\frac{dS}{S} = 2m\frac{rdr}{R^2}$$

где $S = \pi R^2$ - площадь всего диска.

$$I_z = \int_0^R r^2 \cdot 2m\frac{rdr}{R^2} = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{r^2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{1}{2}mR^2 \qquad (2)$$

Учитывая, что

$$I_x + I_y = I_z \qquad \text{и} \qquad I_x = I_y$$

имеем:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2$$

По формуле (2) также можно рассчитать моменты инерции однородного сплошного цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно поперечной оси.

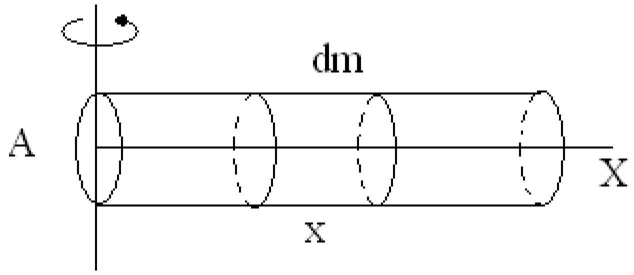


рис. 29

Пусть ось вращения проходит через основание цилиндра перпендикулярно его геометрической оси. Вырежем мысленно бесконечно короткий цилиндр массой dm на расстоянии x от оси вращения. По теореме Гюйгенса-Штейнера для этого цилиндра

$$dI_A = dmx^2 + \frac{1}{4}dmR^2$$

Момент инерции всего цилиндра:

$$I_A = \int x^2 dm + \frac{R^2}{4}\int dm$$

Первое слагаемое формально совпадает с выражением для момента инерции однородного тонкого стержня и, следовательно, равно $\frac{1}{3}m\ell^2$, второе слагаемое равно $\frac{mR^2}{4}$.

$$I_A = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{4}mR^2 \qquad (1)$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс можно найти с помощью формулы (1), если цилиндр разделить на два с высотами $\frac{\ell}{2}$ и массами $\frac{m}{2}$.

$$I_c = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}mR^2$$

Момент инерции сферы с тонкими стенками.

Момент инерции относительно центра сферы:

$$\theta = mR^2$$

Учитывая, что

$$I = I_x + I_y + I_z = 2\theta$$

Имеем: $I = \frac{2}{3}mR^2$ - момент инерции сферы относительно диаметра.

Момент инерции сплошного однородного шара.

Сплошной однородный шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоёв с массами dm.

Так как шар однороден, то

$$dm = \rho \cdot dV = \frac{m}{V}dV = m\frac{dV}{V}$$

$dV = 4\pi r^2 dr$ - объём сферического слоя

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объём всего шара

По формуле (2) момент инерции сферического слоя относительно диаметра:

$$dI = \frac{2}{3}r^2 dm = 2m\frac{r^4 dr}{R^3}$$

Отсюда:

$$I = \int_0^R 2m\frac{r^4 dr}{R^3} = \frac{2}{5}mR^2$$

Момент инерции однородного эллипса.

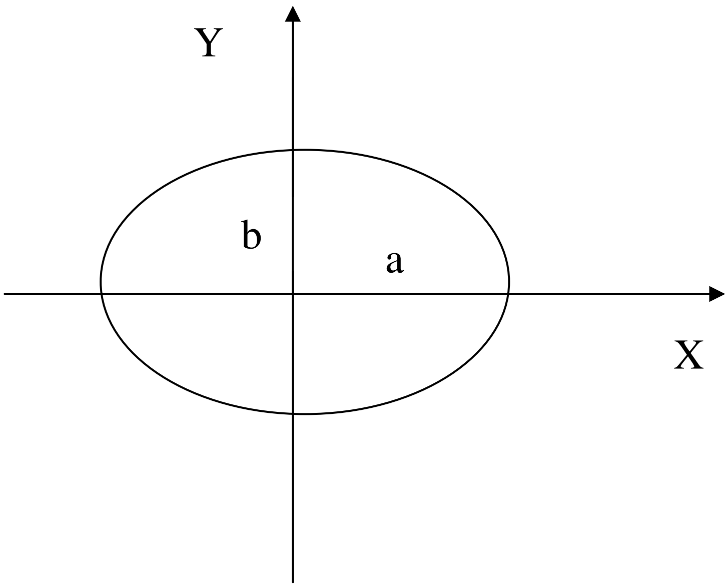


рис. 30

$$I_x = \frac{1}{4} m b^2$$

$$I_y = \frac{1}{4} m a^2$$

$$I_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$$

Момент инерции трёхосного эллипсоида.

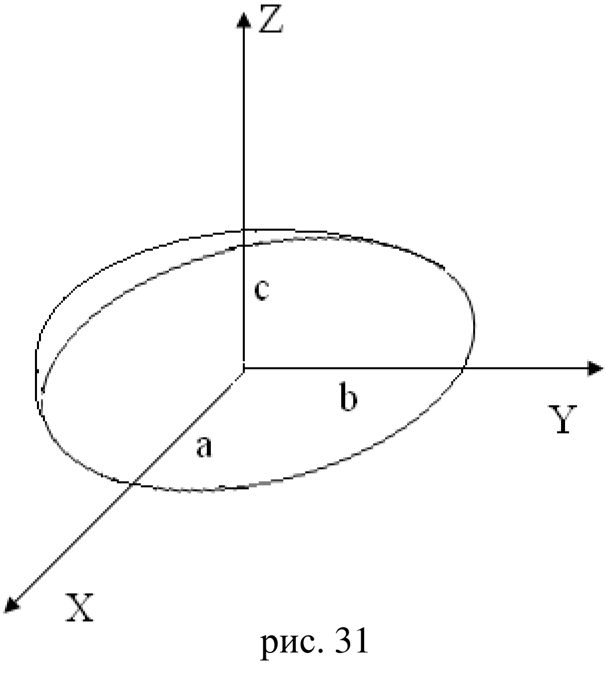


рис. 31

$$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2)$$

$$I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$$

Момент импульса материальной точки.

Момент импульса материальной точки относительно центра (кинетический момент точки относительно центра) **L** – величина, равная векторному произведению радиуса-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на её импульс.

$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i] = [\mathbf{r}_i \mathbf{P}_i]$.

Модуль момента импульса:

$L_i = m_i v_i r_i \sin\alpha$, где α - угол между векторами **r** и **P**.

Размерность и единица момента импульса

$$\dim L = L^2 M T^{-1} \qquad [L] = 1\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

Направление момента импульса определяется по правилу правого буравчика.

Пусть центр O неподвижен. Продифференцируем $\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]$ по времени:

$$\dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$$

Здесь $\dot{r} = \mathbf{v}$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, следовательно:

$[\dot{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{v}m\mathbf{v}] = 0$

Учитывая $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ имеем:

$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{rF}] = \mathbf{M}$ – это есть уравнение моментов относительно неподвижного центра O.

Производная по времени момента импульса материальной точки относительно неподвижного центра O равна моменту действующей силы относительно того же начала. Уравнение моментов можно обобщить на случай произвольной системы материальных точек.

Моментом импульса системы материальных точек относительно некоторого неподвижного центра называется векторная сумма моментов импульсов всех материальных точек относительно того же центра.

$$\mathbf{L}=\sum_i \mathbf{L}_i$$

Т. к. в системе материальных точек действуют внутренние и внешние силы, то под моментом сил понимается векторная сумма моментов всех действующих сил. По третьему закону Ньютона векторная сумма всех внутренних сил равна нулю. Следовательно, векторная сумма моментов внутренних сил тоже равна нулю.

Тогда $\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{M}_{\text{внешних}}$

Производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же неподвижного центра.

В некоторых случаях целесообразно рассмотреть движущийся центр или движущиеся оси. Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ скорость и импульс движущейся материальной точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета O, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор этой точки, проведенный из движущегося центра O'. Движение центра O' может быть как равномерным, так и неравномерным. Пусть скорость движения центра $\mathbf{v_0}$. Относительно неподвижного центра имеем:

$\mathbf{L}=[\mathbf{rp}]$.

Продифференцируем по времени:

$$\dot{\mathbf{L}}=[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}]+[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}}=(\mathbf{v}-\mathbf{v_0})$. Следовательно:

$$\dot{\mathbf{L}}=[(\mathbf{v}-\mathbf{v_0})\mathbf{p}]+[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$$

Учитывая, что $\mathbf{vp}$=0, $[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]=[\mathbf{rF}]=\mathbf{M}$ имеем:

$\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{M}-[\mathbf{v_0p}]$

Для системы материальных точек:

$[\mathbf{v_0p}]=\mathbf{v_0}m\mathbf{v_c}=m[\mathbf{v_0v_c}]$

Следовательно:

$\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{M}-m[\mathbf{v_0v_c}]$ – уравнение моментов относительно движущегося центра.

Если движущийся центр совпадает с центром масс системы, то $\mathbf{v_0}=\mathbf{v_c}$ и $\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{M}$.

Момент импульса относительно неподвижной оси

Векторное уравнение $\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{M}$ эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dL_x}{dt}=M_x;\ \frac{dL_y}{dt}=M_y;\ \frac{dL_z}{dt}=M_z.$$

Следовательно L_x и M_x, L_y и M_y, L_z и M_z называются соответственно моментами импульса и моментами сил относительно осей X, Y, Z.

Уравнение $\frac{dL_x}{dt}=M_x$ называется уравнением моментов относительно неподвижной оси X.

Основной закон динамики вращательного движения

Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению вращательного движения. За неподвижную ось моментов выберем ось вращения.

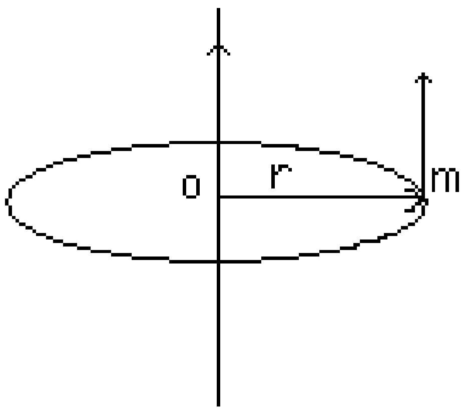


рис. 32

Если материальная точка вращается по окружности радиуса r, то момент импульса ее относительно оси вращения:

$L=mvr$

Пусть ω – угловая скорость вращения. Тогда

$v=\omega r$ и $L=mr^2\omega$.

Для системы материальных точек:

$L=\sum_i L_i=\sum_i m_i r_i^2 \omega_i$

Угловая скорость одинакова для всех точек системы, следовательно:

$L=\omega\sum_i m_i r_i^2$

Но $\sum mr^2 = I$

Следовательно:

$L=I\omega$

Силу F можно разложить на F_n и F_τ

$m\frac{dv}{dt}=F_\tau$; $v=\omega r$

$m\frac{d(\omega r)}{dt}=F_\tau$

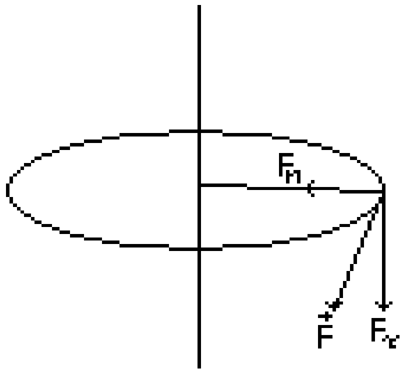


рис. 33

Умножим на r

$mr^2\frac{d\omega}{dt}=rF_\tau$

Сложим для всех материальных точек

$\sum mr^2\frac{d\omega}{dt}=M$

$I\varepsilon=M$

Учитывая, что $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ имеем $M=I\frac{d\omega}{dt}$ или $Mdt=Id\omega$

Так как момент инерции I относительно данной оси есть величина постоянная, то

$$Mdt=d(I\omega).$$

Величина Mdt называется импульсом момента сил, Iω – момент количества движения или момент импульса. Следовательно, изменение момента импульса вращающегося тела численно равно импульсу приложенного момента сил.

Закон сохранения момента импульса.

Если момент внешних сил относительно неподвижного центра равен нулю, то момент импульса системы материальных точек относительно того же центра остается постоянным во времени.

Такое возможно в замкнутой системе, где внешние силы не действуют или их действие скомпенсировано.

$$\sum \mathbf{M} = 0. \quad \dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \qquad \mathbf{L} = \text{const}.$$

Рассмотрим уравнение моментов относительно неподвижной оси.

$$\frac{dL_x}{dt} = \mathrm{M}_x, \ \frac{dL_y}{dt} = \mathrm{M}_y, \ \frac{dL_z}{dt} = \mathrm{M}_z$$

Если момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси (например, X) равен нулю, то:

$\frac{dL_x}{dt} = 0$; $\mathrm{L}_x = \text{const}$. – закон сохранения импульса относительно неподвижной оси X.

Кинетическая энергия вращающегося тела.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде: $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\sum m(\omega r)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum mr^2 = \frac{I\omega^2}{2}$

Учитывая, что L = Iω, имеем:

$$\mathrm{T} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L \cdot I \cdot \omega}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

Рассмотрим кинетическую энергию при плоском движении. Любое плоское движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью v и вращательное движение со скоростью.

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_{пост} + \mathrm{T}_{вр} = \frac{m\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Работа внешней силы при вращательном движении.

Пусть материальная точка вращается по окружности под действием внешней силы F. За время $dt \to 0$ точка повернется на угол $d\varphi$, пройдя при этом путь dS. При этом внешняя сила совершит работу:

$$dA = FdS = Frd\varphi = Md\varphi.$$

Такое же выражение для работы dA получится и для твердого тела, т.к. его можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся с угловой скоростью ω, и за время dt все они повернутся на одинаковый угол dφ.

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi$$

Гироскоп.

Гироскопом называется быстро вращающееся тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.

Симметричным называется гироскоп, обладающий симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой геометрической осью или осью фигуры гироскопа. Ось гироскопа является одной из главных осей инерции. Обычно одна из точек оси фигуры гироскопа бывает закреплена. Закрепленную точку оси фигуры называют точкой опоры гироскопа. Явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются гироскопическими.

Одним из замечательных свойств гироскопа является сохранение неизменной оси вращения при равенстве нулю момента внешних сил. Это можно продемонстрировать с помощью карданова подвеса. Пусть AA' - ось внешнего кольца, BB' - ось внутреннего кольца, CC' - ось гироскопа

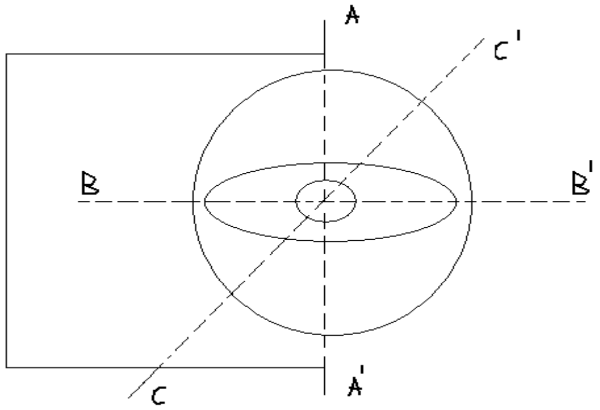


рис. 34

Все три оси взаимно перпендикулярны. При вращении гироскопа ось CC' остается неизменной при любом повороте подставки.

Если к вращающемуся гироскопу приложить пару сил, стремящуюся повернуть его около оси, перпендикулярной к оси его вращения, то гироскоп станет поворачиваться около третьей оси, перпендикулярной к первым двум. Пусть гироскоп вращается вокруг оси OO'. Приложим к оси вращения гироскопа пару сил **F** и **F'**, перпендикулярных к плоскости рисунка и стремящихся повернуть его вокруг оси AA'. При этом верхний конец оси гироскопа ′ отклонится вправо, а нижний конец – влево (указано стрелками **v** и **v'**), т.е. гироскоп повернется около оси BB', перпендикулярной плоскости рисунка.

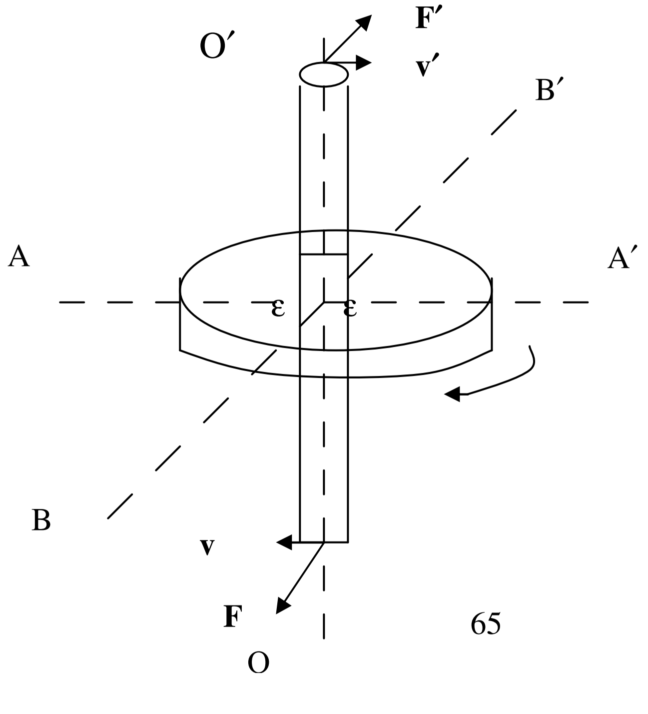


рис. 35

В результате гироскопического эффекта гироскоп стремится расположить ось своего вращения таким образом, чтобы она образовывала возможно меньший угол с осью вынужденного вращения AA′, и чтобы оба вращения совершались в одном и том же направлении. Силы **F** и **F′** носят название гироскопических сил. Момент этих сил:

$M' = [J_{\omega} * \boldsymbol{\omega}']$

Здесь $\boldsymbol{\omega}'$ – вектор угловой скорости поворачивания оси вращения гироскопа. Гироскопические силы появляются при движении обычного волчка.

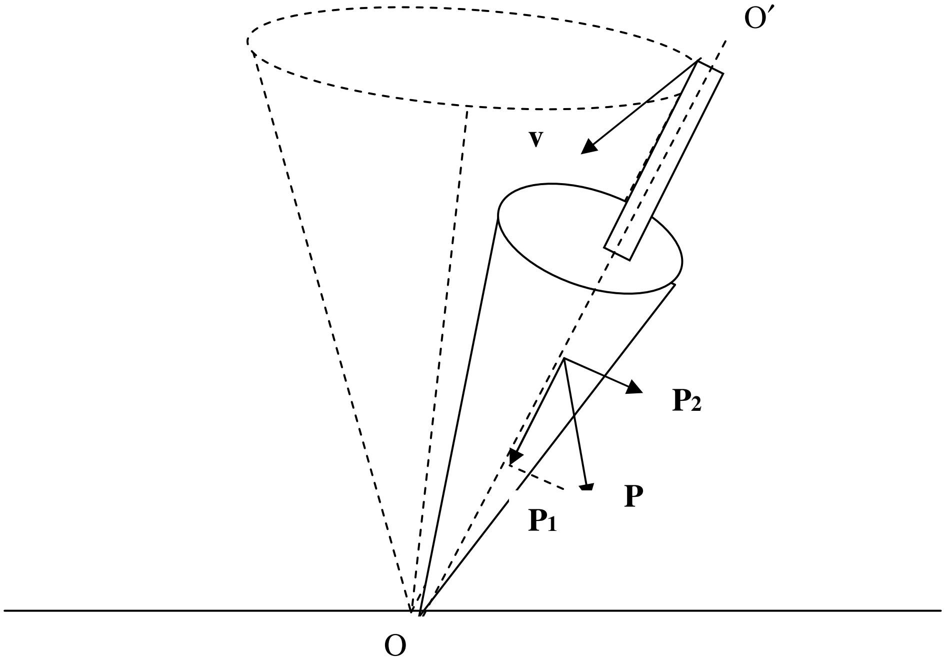


рис. 36

При наклонном положении вращающегося волчка составляющая силы тяжести $\mathbf{P_2}$ стремится опрокинуть этот волчок. Но благодаря гироскопическому эффекту ось OO′ отклоняются в перпендикулярном направлении (указано стрелкой **v**), в результате чего волчок не падает, а начинает двигаться (процессировать) по конической поверхности.

Применение: гирокомпасы, нарезное оружие (вращение не приводит к опрокидыванию снаряда, а лишь к его прецессии вокруг оси вращения), гирогоризонты и гировертиканты.. Гироскопические эффекты могут оказывать и вредное влияние (возникновение добавочного давления на подшипники вращающихся частей при разворотах механизмов).

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Инерциальная система отсчета – такая система отсчета, в которой справедлив закон инерции. Всякая система отсчета, движущаяся по отношению к инерциальной системе отсчета поступательно, равномерно и прямолинейно, так же является инерциальной системой отсчета.

В инерциальных системах отсчета выполняются законы Ньютона.

Первый закон Ньютона – всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Основные положения механики Ньютона:

1. Ускорения тел вызываются силами.
2. Силы обусловлены действием тел друг на друга и однозначно определяются конфигурациями тел.

Движение тела в неинерциальной системе отсчета. Силы инерции.

Найдем уравнения движения в неинерциальных системах отсчета.

Выберем произвольную неподвижную систему отсчета инерциальную и будем считать, что другая система отсчета

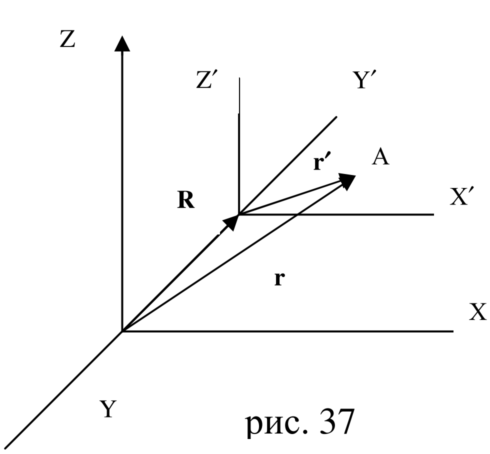


рис. 37

движется относительно неё с некоторым ускорением. Пусть ускорение тела в инерциальной системе отсчета **a.** Пусть система отсчета неинерциальная движется с ускорением $\mathbf{a_0}$ относительно инерциальной. Радиус-векторы, скорости и ускорения т. А в инерциальной и неинерциальной системах отсчета связаны соотношениями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a}'$$

Выразим ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a_0}$$

Ускорение **a** можно представить в виде:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F}$$

Тогда

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F} - \mathbf{a_0}$$

Если даже на тело не действуют никакие другие тела, то относительно неинерциальной системы отсчета тело будет двигаться с ускорением $-\mathbf{a_0}$, т.е. на него как бы действует сила $-m\mathbf{a_0}$**.** Такие силы называют силами инерции.

$\mathbf{F_{in}} = -m\mathbf{a_0}$, где $\mathbf{a_0}$ – ускорение системы отсчета.

Следовательно, уравнение движения в неинерциальной системе отсчета:

$$m\mathbf{a_0}' = \mathbf{F} + \mathbf{F_{in}}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

1.Пусть имеем тележку с укрепленным на ней кронштейном, к которому подвешен на нити шарик (рис.38)

Пока тележка покоится или движется равномерно и прямолинейно, нить расположена вертикально и сила тяжести $\mathbf{P}=m\mathbf{g}$ уравновешивается силой натяжения нити **T**. Если тележка начнет двигаться поступательно с ускорением **a** нить отклонится от вертикали на такой угол, чтобы результирующая сил **P** и **T** сообщала шарику ускорение, равное **a**. Относительно системы отсчета, связанной с тележкой, шарик находится в состоянии покоя, несмотря на то, что результирующая сил **P** и **T** отлична от нуля. Отсутствие ускорения шарика по отношению к этой системе отсчета можно объяснить тем, что, кроме сил **P** и **T**, равных по сумме m**a**, на шарик действует еще и сила инерции $\mathbf{F}_{in} = - m\mathbf{a}$.

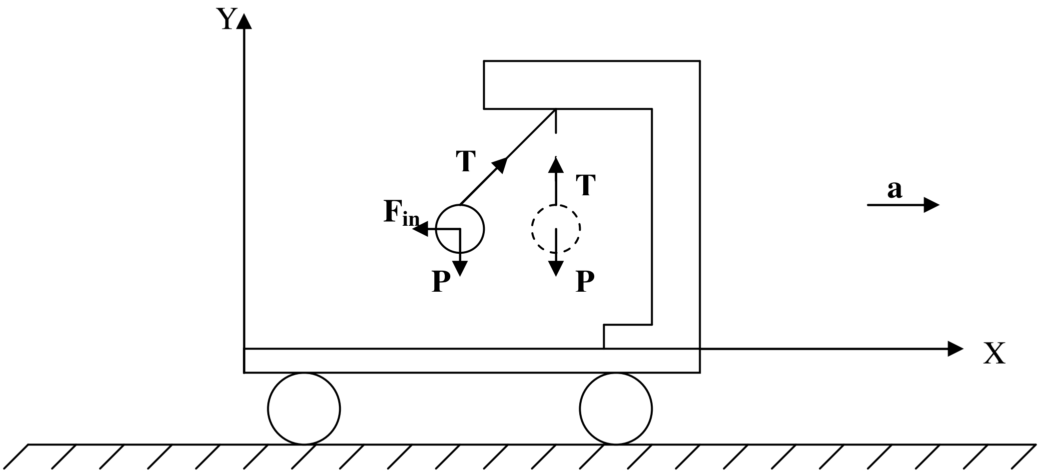


рис. 38

2.Пусть некоторая закрытая кабина движется с ускорением **g** как показано на рис.39.

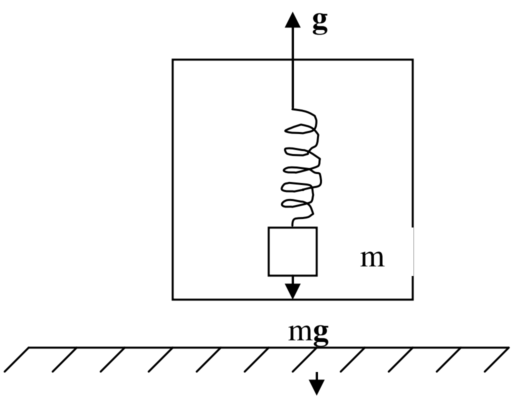


рис. 39

В этом случае все тела, находящиеся внутри кабины, будут вести себя так, как если бы на них действовала сила инерции $\mathbf{F}_{in} = - m\mathbf{g}$. Пружина, к низу которой подвешено тело массой m,растягивается так, чтобы упругая сила уравновесила силу инерции –mg.

3.Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной оси Z с условной скоростью ω (рис. 40).

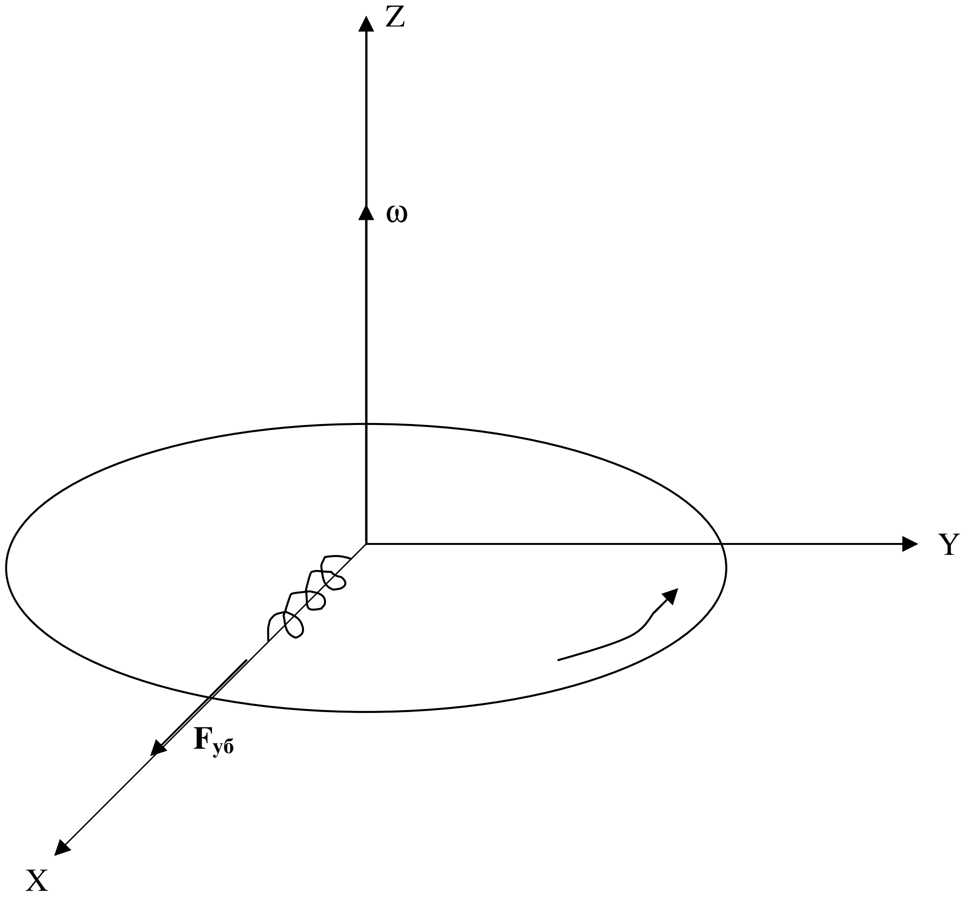


рис. 40

Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной. Шарик занимает на спице такое положение, при котором сила натяжения пружины $\mathbf{F}_{нат}$ оказывается равной произведению массы шарика m на его ускорение $\boldsymbol{\beta} = -\omega^2\mathbf{R}$; $\mathbf{R}$ – радиус-вектор проведенный к шарику из центра диска.

$$\mathbf{F}_{нат} = -m\omega^2\mathbf{R}$$

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится. Это можно объяснить тем, что кроме силы натяжения пружины на шарик действует сила инерции

$$\mathbf{F}_{уб} = m\omega^2\mathbf{R},$$

направленная вдоль радиуса от центра диска. Силу инерции, возникающую во вращающейся (по отношению к инерциальным системам) системе отсчета, независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно нее со скоростью **v**:

Если положение тела во вращающейся системе отсчета характеризуется радиус-вектором **r′**, то центробежную силу инерции можно представить в виде двойного векторного произведения:

$$\mathbf{F}_{\text{уб}} = m[\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}]].$$

Наличие сил инерции отражает ускоренное движение системы координат и силы инерции определяют движение тела в системе отсчета, движущейся с ускорением. В этом смысле силы инерции ничем ни отличаются от обычных сил взаимодействия между телами. Принципиальное отличие сил инерции от остальных сил, выражающих взаимодействие тел, состоит в том, что силы инерции не имеют противодействующей и нельзя указать того тела, со стороны которого действуют силы инерции. При точном решении задач движения тела относительно земной поверхности необходимо учитывать центробежную силу инерции.

Наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения тела обусловлено действием силы, с которой тело притягивается Землей, и центробежной силы инерции (рис. 41). Результирующая этих сил -

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{уб}} \text{ - сила тяжести, равная } m\mathbf{g}.$$

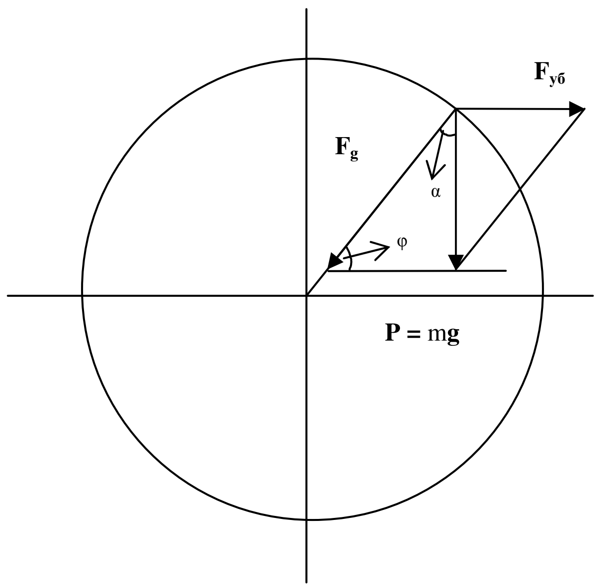


рис. 41

Силы Кориолиса.

С точки зрения наблюдателя, связанного с вращающейся системой, на тело, перемещающееся относительно этой системы, действует, кроме центробежной, еще добавочная сила, которая называется силой Кориолиса или кориолисовой силой.

Пусть система представляет собой диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O (рис.42). Пусть тело перемещается равномерно из точки A вдоль радиуса OC со скоростью $\mathbf{v}'$ относительно диска. За время Δt тело пройдет отрезок $\Delta l = AB = v'\Delta t$.

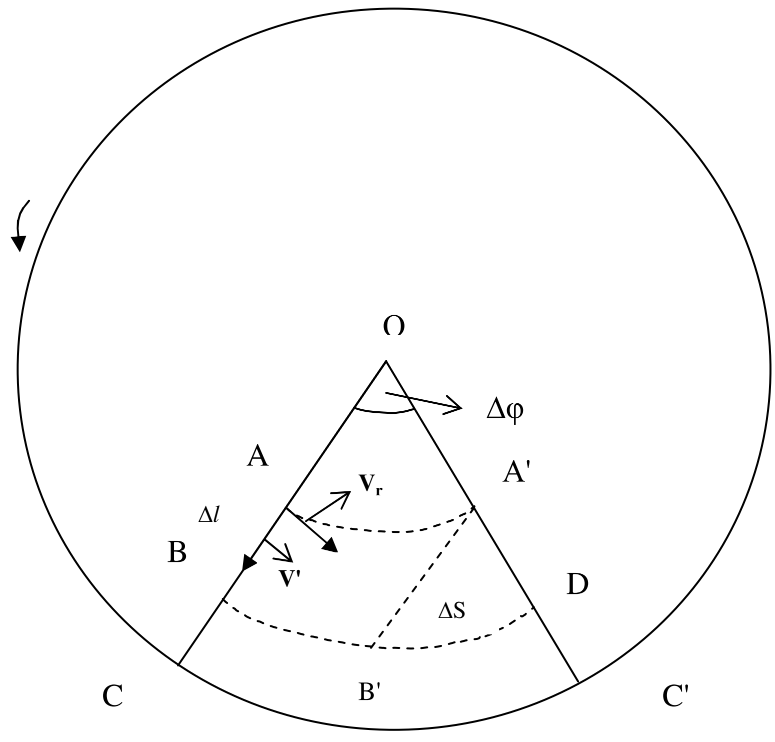


рис. 42

За время Δt с точки зрения неподвижного наблюдателя радиус OC повернется на угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ и тело переместится в точку D. С точки зрения неподвижного наблюдателя тело участвует в двух движениях: относительно диска со скоростью v' и во вращательном движении со скоростью ω.

Линейная скорость вращения диска различна для различных точек этого диска. Пусть в точке А она будет v_r. Если тело двигалось бы только со скоростью v_r , то оно пришло бы в точку А'. Двигаясь со скоростями v_r и v, тело пришло бы в точку В', но оно попадает в точку D. Это происходит потому, что линейная скорость v_r возрастает по мере удаления от центра вращения, и тело движется в этом случае ускоренно относительно неподвижного наблюдателя.

Величину этого ускорения можно определить следующим образом: за время Δt тело пройдет добавочный путь

$$\Delta S = A'B' \cdot \Delta\varphi = \Delta l \cdot \Delta\varphi = v' \Delta t \, \Delta\varphi = v' \Delta t \cdot \omega \, \Delta t = \omega \, v' \, (\Delta t)^2$$

Добавочный путь возрастает пропорционально квадрату времени. Если сравнить с путем, проходимым при равноускоренном движении

$$S = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

то получим

$$a = 2v'\omega$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к относительной скорости v', т.е. в нашем случае – вправо. Следовательно, на тело массы m действует сила F=ma, направленная как и ускорение (вправо). Если бы не было этой силы, то тело, с точки зрения наблюдателя, находящегося на диске, отклонилось бы от своего прямолинейного движения по диску. По третьему закону Ньютона на связи, удерживающие тело на вращающем диске будет действовать сила $F_k = F$ и направленная в противоположную сторону. Следовательно: с точки зрения наблюдателя, связанного с вращающейся системой отсчета, к телу, движущемуся вдоль радиуса со скоростью v' приложена инерционная сила $F_k = 2v'am$ и направленная перпендикулярно v'. Это есть сила Кориолиса.

Сила Кориолиса существует и в том случае, если тело движется на окружности с центром на оси вращения.

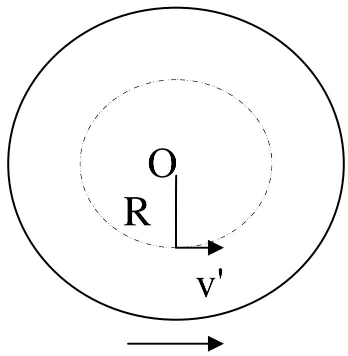


рис. 43

При движении тела относительно диска со скоростью v', полная скорость относительно неподвижного наблюдателя $v_r + v'$, где v_r - линейная скорость вращения диска в том месте, где находится тело. На тело действует центростремительная сила:

$$F_ц = \frac{m(v_r + v')^2}{R}$$

Или $$F_ц = \frac{mv_r^2}{R} + \frac{mv'^2}{R} + 2\frac{v' v_r}{R} m$$

Для наблюдателя связанного с диском

$\frac{mv_r^2}{R}$ - центробежная сила, вызванная вращением диска с угловой скоростью ω;

$\frac{mv'^2}{R}$ - центробежная сила, вызванная относительным движением тела по кругу со скоростью v';

$2m\frac{v_r v'}{R} = F_k$ - сила Кориолиса, вызванная вращением диска и движением тела относительно диска.

Пусть тело движется с относительной скоростью v', которая составляет угол β с радиусом ОС.

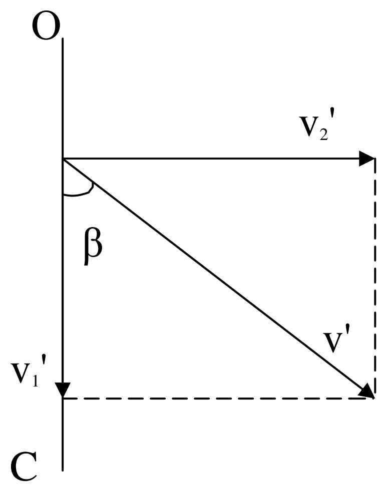


рис. 44

Скорость v' можно разложить на 2 составляющие

$$v_1' = v'\cos\beta$$
$$v_2' = v'\sin\beta$$

Составляющей v_1' соответствует сила Кориолиса, равная

$$F_{k_1} = 2v'\omega m\cos\beta$$

Составляющей v_2':

$$F_{k_2} = 2v'\omega m\sin\beta$$

Полная сила Кориолиса:

$$F_k = \sqrt{F_{k_1}{}^2 + F_{k_2}{}^2} = \sqrt{4v'^2 m^2\omega^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta)} = 2v'm\omega$$

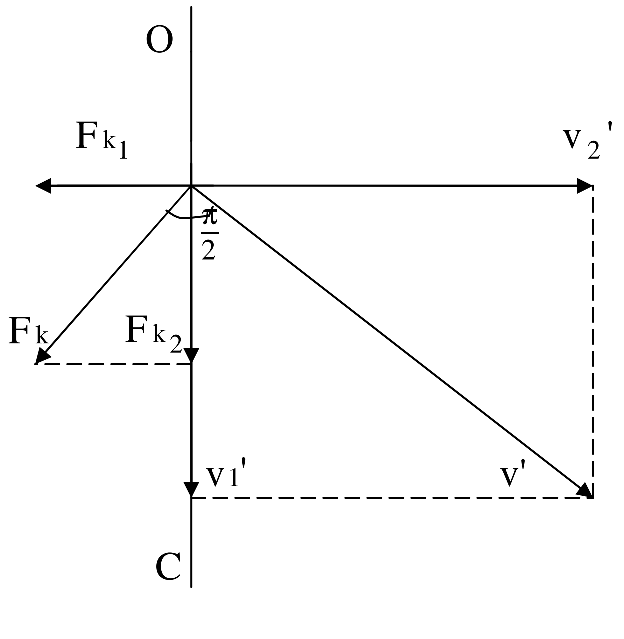


рис. 45

Пусть тело движется не в плоскости диска, а в направлении, составляющем угол α с осью вращения.

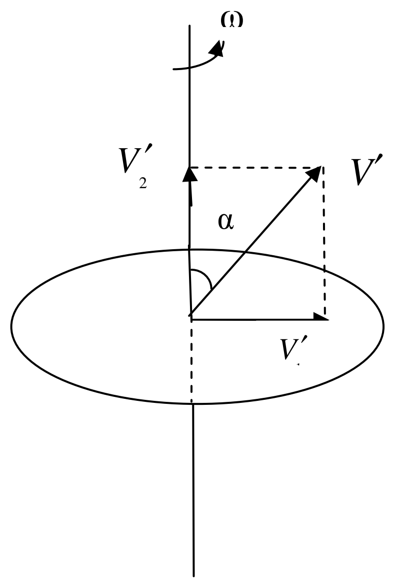


рис. 46

Разложим v' на две составляющие v'_1 и v'_2. Скорость v'_2 не приводит ни к каким перемещениям вдоль диска и не ведет к появлению никаких ускорений и сил. Величина силы Кориолиса определяется лишь составляющей $v'_1 = v' \sin\alpha$.

$$F_k = 2 v'\omega m \sin\alpha.$$

Следовательно, сила Кориолиса выражается как

$$\mathbf{F}_к=2m[\mathbf{v}'_1\boldsymbol{\omega}]$$

и направление определяется по правилу правого буравчика

Сила Кориолиса проявляется и при движении тел по поверхности Земного шара.

В северном полушарии сила Кориолиса направлена направо, в южном - налево. В северном полушарии подмываются правые берега, в южном – левые.

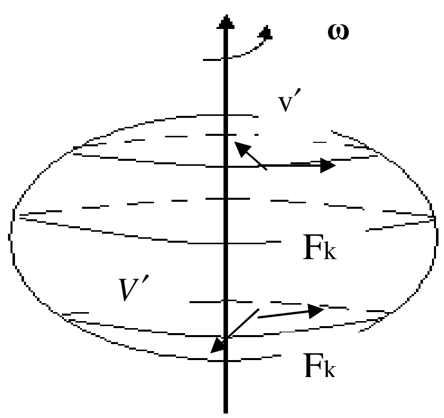


рис. 47

Преобразование Галилея.

Принцип относительности Галилея.

Во всех инерциальных системах отсчета законы Ньютона имеют одну и ту же математическую форму.

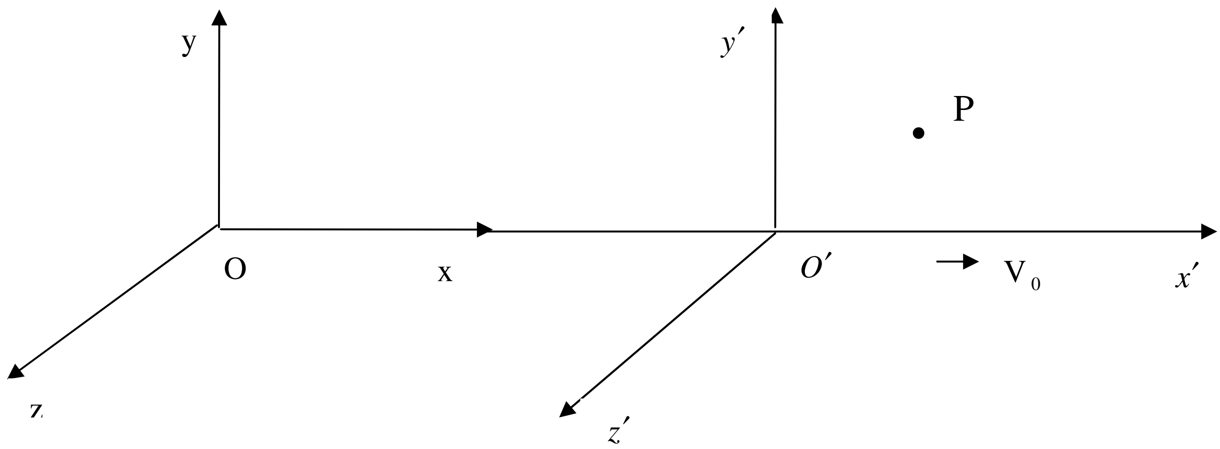


рис. 48

Пусть система отсчета O' движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно O. Отсчет времени начнем с того момента, когда начала координат O и O' совпадают. Тогда через время t система O' пройдет относительно O расстояние v_0t.

Опыт показывает, что если v<<c, то часы в обеих системах отсчета идут одинаково:

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + v_0t(1) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(1) – называются преобразованиями Галилея.

Эти уравнения позволяют перейти от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы отсчета.

Воспользуемся полученными формулами для проверки математической записи законов динамики в различных системах.

Продифференцируем (1) по времени:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}' + v_0\\ \dot{y} &= \dot{y}'\\ \dot{z} &= \dot{z}'\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}v_x &= v'_x + v_0\\ V_y &= V'_y\\ V_z &= V'_z\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Следовательно, $v = v' + v_0$ теорема о сложении скоростей.

Скорость тела относительно системы О равна сумме скорости тела относительно системы O' и скорости системы O' относительно О.

Продифференцируем (2) по времени:

$$\left.\begin{aligned}\dot{V}_x &= \dot{V}'_x\\ \dot{V}_y &= \dot{V}'_y\\ \dot{V}_y &= \dot{V}'_y\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}a_x &= a'_x\\ a_y &= a'_y\\ a_y &= a'_z\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

Следовательно,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$$

Системы О и О' были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно сделать вывод:

Законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета – механический принцип относительности Галилея.

Все законы механики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой и поэтому все механические явления одинаково протекают во всех инерциальных системах отсчета.

В пределах системы отсчета никакими механическими опытами нельзя установить, движется ли она равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя.

Элементы специальной теории относительности

Эйнштейн в 1905 г. создал физическую теорию пространства и времени для случая очень малых гравитационных взаимодействий. Основу этой теории образуют два постулата:

1) **Принцип относительности Эйнштейна**

Все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.

Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны (одинаковы) по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2) **Принцип постоянства скорости света**

Скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета O и O'.

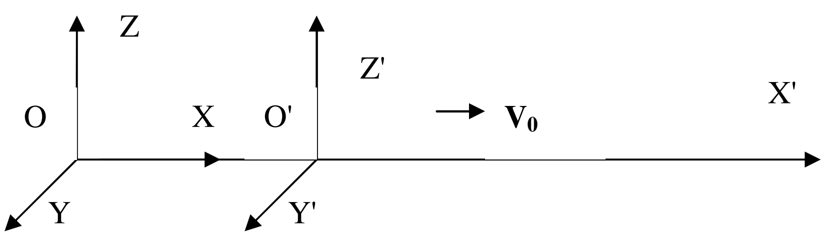


рис. 49

Эйнштейн показал, что из двух постулатов его теории следует, что координаты движущихся тел и время, измеренные относительно O и O' связаны между собой преобразованиями Лоренца.

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(4) Преобразования Лоренца

v_0 – скорость движения O' относительно O.

По формуле (4) осуществляется переход от системы O к системе O′.

Если в преобразованиях Лоренца положить $c = \infty$, то из преобразований Лоренца получим преобразования Галилея. Следовательно, в механике Ньютона предполагается бесконечно большая скорость распространения «сигналов времени». Приведем важнейшие результаты теории относительности Эйнштейна. Пользуясь преобразованиями Лоренца, простыми математическими преобразованиями можно показать, что:

1) Расстояние между двумя определенными точками твердого тела, измеренные относительно покоящейся (l) и движущейся l′ систем отсчета связаны соотношением:

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

2) Промежутки времени измеренные относительно покоящейся и движущейся систем отсчета связаны соотношением:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

3) Скорости тела в движущейся (v′) и покоящейся (v′) системах отсчета связаны соотношением:

$$v' = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}}$$

4) Если тело, покоящееся относительно системы отсчета O, имеет массу m_0, то при движении со скоростью v_0 его масса будет равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

5) Основное уравнение механики

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_0^2}{c^2}}}\right)$$, где $\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_0^2}{c^2}}}$ - релятивистский импульс.

6) Соотношение между энергией тела и его массойv

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_0^2}{c^2}}}$$

7) Кинетическая энергия твердого тела

$$E_k = mc^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_0^2}{c^2}}} - 1\right)$$

8) Импульс и полная энергия частицы связаны соотношением:

$$p = \frac{E}{c^2}\mathbf{v} \quad ; \qquad E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Границы применимости классической механики.

Эйнштейн показал, что классическая механика Ньютона применима только при скоростях тел много меньше скорости света.

Пространство и время, которые в преобразованиях Галилея не зависят от скорости движения, при скоростях, близких к скорости света, становятся зависимыми от скорости. Время течет медленнее, пространство сжимается в направлении движения. Эйнштейн вывел новые преобразования координат, учитывающие зависимость свойств пространства и времени от скорости, которые оставляют скорость света постоянной во всех инерциальных системах отсчета.

Механические колебания

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания свойственны всем явлениям природы: пульсируют излучения звезд, внутри которых происходят циклические ядерные реакции, с высокой степенью периодичности вращаются планеты солнечной системы, движение Луны периодически вызывает приливы и отливы на Земле, внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные ритмично повторяющиеся процессы.

В зависимости от физической природы колебательного процесса и механизма его возбуждения различают механические колебания, электромагнитные, электромеханические. Колебания любых физических величин почти всегда связаны с попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида. При механических колебаниях происходит превращение потенциальной энергии в кинетическую и наоборот.

Определим общие понятия, относящиеся к колебаниям.

Колеблющаяся величина – поочередно возрастающая и убывающая во времени физическая (скалярная, векторная или тензорная) величина, связанная с описанием и движением системы.

Колебательная система – система, способная совершать свободные колебания.

Свободные колебания – колебания, совершающиеся при отсутствии внешнего воздействия за счет первоначально вынесенной энергии, например в механической колебательной системе – за счет потенциальной энергии, внесенной через начальное смещение, или кинетической энергии, внесенной через начальную скорость.

Периодические колебания – колебания, при которых состояние системы в точности повторяется через равные интервалы времени.

Гармонические колебания – это периодические колебания, при которых любая физическая величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где x – значение колеблющейся величины в данный момент времени, А–амплитуда колебаний, ω_0 - угловая (собственноциклическая) частота колебаний, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний, φ_0 - начальная фаза колебаний.

Любое негармоническое колебание можно представить в виде суммы гармонических колебаний, т.е. в виде спектра гармонических колебаний.

Фаза колебаний – аргумент функции, описывающий величину, изменяющуюся по закону гармонического колебания. Фаза колебаний определяет положение колеблющейся величины в любой момент времени.

Фаза гармонических колебаний – величина безразмерная и выражается в радианах.

$$\dim(\omega_0 t + \varphi_0) = 1; \qquad [(\omega_0 t + \varphi_0)] = 1 \text{ рад}$$

Начальная фаза гармонических колебаний – значение фазы гармонических колебаний в начальный момент времени (t=0).

$$\dim \varphi_0 = 1; \qquad [\varphi_0] = \text{рад.}$$

Период колебаний Т – интервал времени, в течении которого фаза гармонических колебаний изменяется на 2π.

Это - наименьший интервал времени, через который повторяется состояние механической системы, характеризуемое значениями обобщенных координат и их производных.

$$\dim T = T; \qquad [T] = 1\text{с}.$$

Частота периодических колебаний – число периодов колебаний в единицу времени или величина, обратная периоду колебаний.

$$\dim \upsilon = T^{-1} \quad [\upsilon] = 1\text{с}^{-1} \text{ - Герц (Гц).}$$

Герц равен частоте периодического процесса при которой за время 1с совершается один цикл периодического процесса.

Угловая (круговая, циклическая) ω частота гармонических колебаний -

$$\omega = 2\pi\upsilon\ ; \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\dim\omega = T^{-1} \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Амплитуда гармонического колебания – A – наибольшее по модулю отклонение колеблющейся величины от её значения при гармонических колебаниях.

$$\dim A = L \qquad [A] = 1\text{м}$$

Собственная частота ω_0 - каждая из частот свободных колебаний линейной колебательной системы.

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях.

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -A\frac{2\pi}{T}\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{\mathrm{v}} = -- A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Амплитудные значения:

$$\mathrm{v}_{\max} = A\omega_0 = A\frac{2\pi}{T}$$

$$a_{\max} = A\omega_0^2 = A\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Учитывая, что $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, имеем

$$a(t) = -\frac{4\pi^2}{T^2}x(t)$$

Проследим изменения смещения, скорости и ускорения за время одного колебания.

t	x	v	a
0	A	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}A$
$\frac{T}{4}$	0	$-\frac{2\pi}{T}A$	0
$\frac{T}{2}$	–A	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}A$
$\frac{3T}{4}$	0	$\frac{2\pi}{T}A$	0
T	A	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}A$

Амплитуду колебаний А и начальную фазу φ колебаний можно определить если известны значения X и v в какие-либо определенные моменты времени.

Если, например, в момент $t=t_1$ смещение X_1, а в момент $t=t_2$ скорость v_2.

Действительно:

$$X = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ и } v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

получаем два уравнения.

$$X_1 = A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \text{ и } v_2 = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t_2 + \varphi).$$

из которых можно определить A и φ. Задача упрощается, если известны значения значений $X=X_0$ и $v=v_0$ в момент времени $t=0$.

$$x(t)_{t=0} = x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad (1)$$

$$v(t)_{t=0} = v_0 = -A\omega_0\sin\varphi_0 \qquad (2)$$

$$\frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin\varphi_0 \qquad (3)$$

Возведем (1) и (2) в квадрат и сложим почленно:

$$x^2{}_0 = A^2\cos^2\varphi_0$$

$$\frac{v^2{}_0}{\omega^2{}_0} = A^2 \sin^2 \varphi_0$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2; A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (4)$$

Разделим (3) на (1)

$$tg\,\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

$$\varphi_0 = arctg\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \qquad (5)$$

(4) и (5) определяют амплитуду и начальную фазу через начальные условия – смещение и скорость.

Энергия гармонических колебаний

Пусть материальная точка массы m совершает гармонические колебания под действием квазиупругой (или упругой) силы F=-kx. Совершая колебания, материальная точка обладает скоростью v, следовательно, кинетической энергией

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[= A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)]^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0{}^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{4}mA^2\omega_0{}^2[1\text{-}\cos2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки:

$$F = -grad\pi \qquad \pi = -\int F_x dx \qquad \left[\frac{k}{m} = \omega_0^2; k = \omega_0^2 m\right]$$

$$\pi = -\int_0^x F_x dx = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2[1 - \cos2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

Полная энергия колеблющейся материальной точки:

$$E=K+П=\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)+\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\frac{1}{2}KA^2=$$

$$=\frac{1}{2}m\frac{4\pi^2}{T^2}A^2$$

$E=\frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ - полная энергия гармонического осциллятора. Полная энергия величина постоянная. Кинетическая и потенциальная энергия в отдельности не остаются постоянными, а совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения $\frac{1}{4}mA^2\omega_0^2$ с удвоенной частотой.

Гармонический осциллятор.

Рассмотрим колебания груза массой m на пружине жесткостью k. Такая система называется пружинным маятником или гармоническим осциллятором (рис.50).

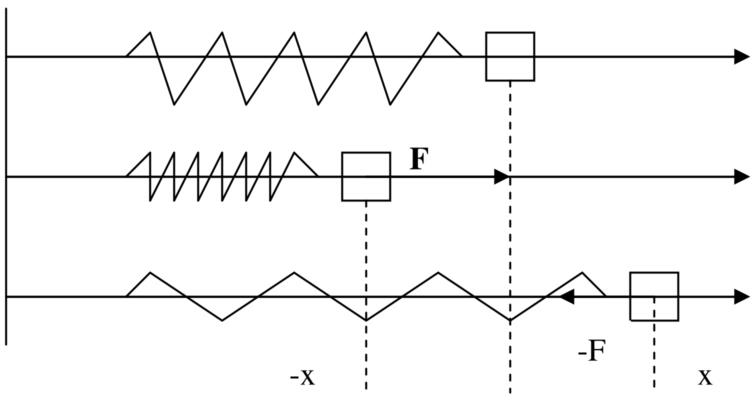


рис. 50

Если силы трения в системе так малы, что ими можно пренебречь, то в системе с одной степенью свободы, в которой восстанавливающая сила пропорциональна смещению от положения равновесия, малые собственные колебания происходят по гармоническому закону $x = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ или $x = A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$. Определим положение материальной точки ее смещением из положения равновесия координатой x. Для упругой силы характерно то, что она пропорциональна смещению и направлена к положению равновесия и называется возвращающей или восстанавливающей силой.

$$F = -kx.$$

Запишем уравнение движения груза

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -kx$$

Отсюда

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

В общем случае, k – коэффициент пропорциональности между возвращающей силой и смещением материальной точки из положения равновесия, либо между моментом возвращающей силы и угловым смещением; величина постоянная для данной системы.

Обозначим

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Следовательно:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

(1) - есть дифференциальное уравнение колебаний.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$$

$$0 = 0$$

Следовательно, выражение (2) является решением уравнения (1).

Колебания будут периодическими, поскольку зависимость колеблющейся величины x(t) удовлетворяет условию

x (t+T) = x(t), где T – период колебаний.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Математический маятник

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на длинной, невесомой и нерастяжимой нити и совершающая свободные колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

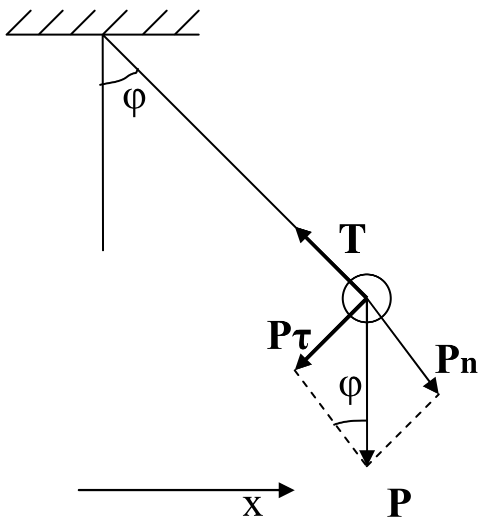


рис. 51

Pτ – сила, направленная к положению равновесия. Под действием этой силы материальная точка совершает свободные колебания.

Pτ = **P**sinφ. Рассмотрим малые колебания вблизи положения равновесия.

Условие малости колебаний:

$\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi \approx \varphi$

$$\mathbf{P}\tau = -\mathbf{P}\varphi$$

Пусть длина маятника ℓ

$$v = \omega\ell$$

$$\frac{dv}{dt} = \acute{v} = a = \frac{d\omega}{dt}\ell = \ell\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ell\ddot{\varphi}$$

$$F = ma; \qquad m\ell\ddot{\varphi} = -mg\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

Обозначим $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=0$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Физический маятник.

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести тела и называемой осью качания маятника (рис. 50). Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс. Свободные колебания совершаются под действием силы **P**τ. Рассматриваем малые колебания.

Pτ = -**P**sinφ = -**P**φ

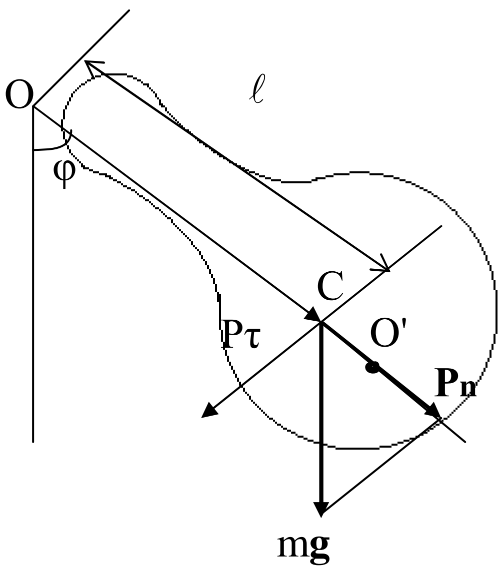


рис. 52

Найдём момент этой силы относительно оси качания маятника.

$$M = -\,l\cdot P_\tau = -\,lP\varphi$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения:

$$M = I\cdot\varepsilon = I\ddot{\varphi}$$

$$I\ddot{\varphi} = -lP\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{lP}{I}\varphi = 0 \qquad\qquad \ddot{\varphi} + \frac{mg\ell}{I}\varphi = 0$$

Обозначим $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Обозначим $L = \frac{I}{ml}$ - приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, при которой периоды колебаний математического и физического маятников равны.

Пусть OO' – приведенная длина физического маятника.

Точка O' называется центром качания маятника.

Центр качания – можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.

Точка подвеса и центр качания являются взаимными и сопряженными точками. **Если маятник подвесить за центр качания O', то его период не изменится и прежняя точка подвеса O сделается новым центром качания. - Теорема Гюйгенса.**

Крутильные колебания.

Рассмотрим случай собственных крутильных колебаний некоторого тела с моментом инерции J, подвешенного на длинной тонкой нерастяжимой нити. Момент инерции самой нити считается малым, и мы пренебрегаем им. Пусть длина нити l. Основное уравнение динамики вращательного движения:

M=J*ε, где M – суммарный момент сил,

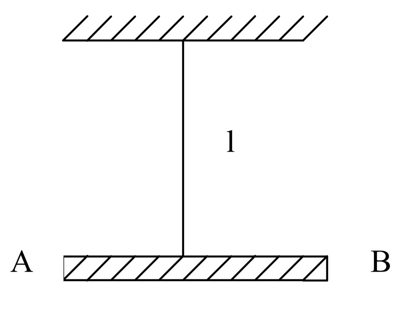


рис. 53

приложенных к телу. Угловое ускорение ε есть вторая производная от угла поворота по времени $\varepsilon = \ddot{\varphi}$

При повороте тела АВ в нити возникают деформации кручения.

Рассмотрим эти деформации для кругового цилиндра длиной L и радиуса r (рис.52).

Пусть верхний конец цилиндра закреплен неподвижно, а к нижнему приложена сила, закручивающая стержень.

Рассмотрим отрезок OA = ρ, отложенный по радиусу в нижнем сечении. Под влиянием закручивающего момента силы от

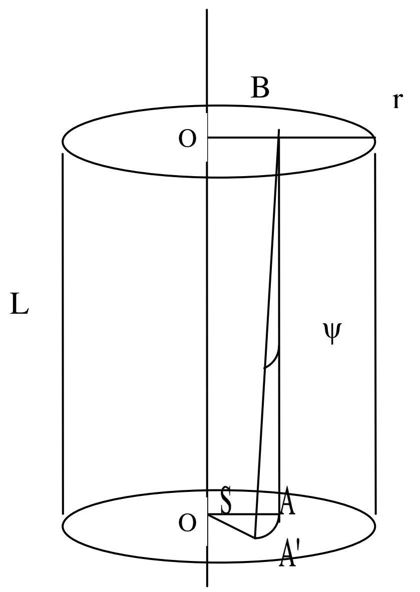


рис. 54

резок OA повернется на угол φ и займет положение OA′.

Относительной деформацией будем считать величину $\frac{\varphi}{L}$ т.е. угол закручивания, отнесенный к длине стержня. В пределах упругой деформации величина $\frac{\varphi}{L}$ пропорциональна закручивающему моменту приложенной силы.

$$\frac{\varphi}{L} = CM \qquad (*)$$

Величина С постоянная для данного стержня; для разных стержней она зависит от радиусов и материала стержня. При закручивании стержня его нижний конец испытывает сдвиг относительно верхнего.

Прямая BA поворачивается, принимая положение BA′.

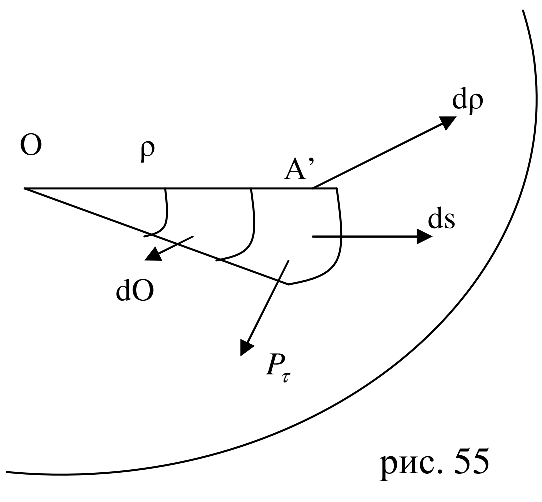


рис. 55

Угол ψ называется углом сдвига и он равен

$$\psi = \frac{1}{N} P_\tau \qquad (1)$$

Где P_τ - касательное усиление, верхности ds у точки A′. N - модуль сдвига.

Из рис.55 имеем:

$$tg\psi \approx \psi = \frac{AA'}{L} \approx \frac{\varphi.S}{L} \qquad (2)$$

Учитывая (1):

$$P_\tau = N\psi = N\frac{\varphi.S}{L} \qquad (3)$$

Сила, приложенная к элементу поверхности ds, равна $P_\tau \cdot ds$; момент этой силы: $M = r \cdot F$

$$dM = \rho P_\tau \cdot d\acute{S}$$

Введем полярные координаты Θ и ρ. В полярных координатах

$$dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\,\Theta$$

$$dM = P_\tau\ \rho^2\ d\rho\ d\Theta$$

Учитывая (3):

$$dM = \frac{N\cdot\varphi}{L}\rho^3 d\rho\, d\Theta \qquad (4)$$

Полный момент M сил, приложенных ко всему нижнему торцу стержня, получим, проинтегрировав выражение (4) по всей площади круга радиуса r

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{N\cdot\varphi}{L}\rho^3 d\rho\, d\Theta = \frac{N\cdot\varphi}{L}\cdot\frac{r^4}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi\cdot N\cdot\varphi\cdot r^4}{2L} \qquad (5)$$

Сравнивая (5) со (*) получим:

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{2}{\pi\cdot N\cdot r^4} M.$$

Т.е. константа $C = \frac{2}{\pi\cdot N\cdot r^4}$

Тогда: $\varphi = \dfrac{2}{\pi \cdot N \cdot r^4} \cdot L \cdot M.$

Отсюда: $$M = \frac{\pi \cdot N \cdot r^4}{2L}\,\varphi \qquad (6)$$

Как видно из (6) момент силы сильно зависит от радиуса кругового цилиндра. Толстые и короткие стержни трудно подвергнуть закручиванию. Тонкие и длинные проволоки под влиянием даже очень малых моментов обнаруживают заметное закручивание.

Вернёмся к крутильным колебаниям. Из (6) имеем:

$M = - D \cdot \varphi$ (7), где - $D = \dfrac{\pi \cdot N \cdot r^4}{2L}$ - модуль кручения для данной нити, N - модуль сдвига.

Тогда: $$\varepsilon = \frac{M}{I} \text{ или } \ddot{\varphi} = -\frac{D}{I}\,\varphi.$$

Обозначим $\dfrac{D}{I} = \omega_0^2$, $\qquad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi.$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0)$$

Период крутильных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{I}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (8)$$

Период крутильных колебаний тела, подвешенного к нити, целиком определяется его моментом инерции и модулем кручения нити.

Кинетическая энергия крутильных колебаний:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\,I\,\dot{\varphi}^2 \qquad (9)$$

Как видно из (9) кинетическая энергия не является постоянной величиной, она достигает max, когда тело проходит через положение равновесия и становиться равной нулю при наибольшем повороте тела.

Для поворота тела на угол φ необходимо совершить работу:

$A = M \cdot \varphi$ (10)

В случае закручивания нити, момент сил не постоянен, а зависит от угла поворота, поэтому в формуле (10) необходимо брать среднее значение момента приложенных сил: $\langle M \rangle = \frac{1}{2} D\varphi$.

Тогда $A = \langle M \rangle\, \varphi = \frac{1}{2} D\varphi^2$.

Потенциальная энергия численно равна этой работе:

$E_p = \frac{1}{2} D\varphi^2$.

Полная энергия тела:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} I\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} D\varphi^2 \qquad (11)$$

Геометрический способ представления гармонических колебаний

Во многих приложениях, связанных с рассмотрением колебательного процесса, удобен геометрический способ представления колебаний с помощью вектора амплитуды. Выберем ось X и на ней произвольную точку O (рис.56).

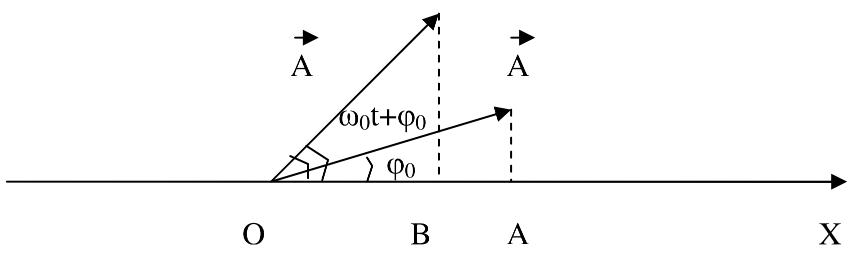


рис. 56

Из этой точки под углом φ_0, равным начальной фазе колебаний, отложим в некотором масштабе вектор, равный амплитуде колебаний A. Проекция вектора A на ось X

$OA = x = A\cos\varphi_0$

Если привести этот вектор во вращение против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси X в пределах от -A до A, причем координата этой проекции будет меняться со временем по закону

$x(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

Следовательно, проекция конца вектора на ось X будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора, с частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью OX в начальный момент времени.

Графическое изображение гармонических колебаний посредством вращающегося вектора амплитуды называется методом векторных диаграмм.

Сложение гармонических колебаний

Часто приходится иметь дело с таким движением, при котором материальная точка одновременно участвует в двух или нескольких колебательных движениях. Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующих колебаний системы в тех случаях, когда эта система участвует в нескольких колебательных процессах. Различают два предельных случая: сложение колебаний одинакового направления и сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение колебаний, происходящих вдоль одной прямой

Рассмотрим два колебания одинакового направления и одинакового периода, происходящие с некоторой разностью фаз и имеющих разные амплитуды.

$x_1 = A\cos(\omega t+\varphi_1)$ (1)

$x_2 = A\cos(\omega t+\varphi_2)$ (2)

Результирующее колебание

$x = x_1+x_2$

Выполним это сложение по методу векторных диаграмм (рис. 57).

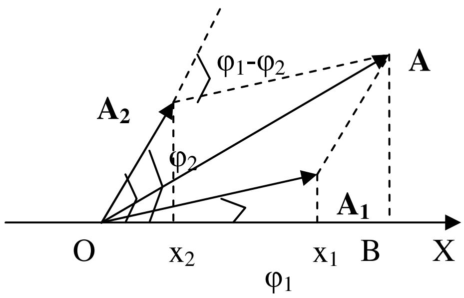


рис. 57

$\mathbf{A} = \mathbf{A_1}+\mathbf{A_2}$

Возведем в квадрат

$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A_1}^2+2\mathbf{A_1}\mathbf{A_2}+\mathbf{A_2}^2$

$$A^2 = A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi \qquad (3)$$

где $\varphi = \varphi_2-\varphi_1$

Результирующий вектор вращается с той же угловой скоростью, что и вектора A_1 и A_2.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OB} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \qquad (4)$$

Само результирующее колебание можно выразить через проекцию

$$x = x_1+x_2 = A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (5)$$

Результирующее колебание (5) представляет собой гармоническое колебание, происходящее вдоль той же прямой, что и слагаемые, и с периодом, равным периоду слагаемых колебаний.

Согласно (3) амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ($\varphi_2-\varphi_1$).

Если $\varphi_2-\varphi_1 = 2k\pi$, $k = 0; \pm1; \pm2; \dots$,

то

$$A^2 = A_1^2+A_2^2+2A_1A_2$$

$$A = A_1+A_2$$

Если $\varphi_2-\varphi_1 = (2k+1)\pi$, $k = 0; \pm1; \pm2; \dots$,

то

$$A = |A_1-A_2|$$

Два колебательных процесса называются когерентными, если они согласованно протекают во времени так, что их разность фаз остается постоянной.

Пусть точка участвует в двух колебаниях, которые происходят с разными периодами:

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$

$$x_2 = A^2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (6)$$

Пусть $\omega_2>\omega_1$

Разность фаз:

$$\Phi_2(t)-\Phi_1(t) = [(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]$$

Результирующее значение амплитуды:

$$(7) \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1\cdot A_2\cos[(\omega_2-\omega_1)t + (\varphi_2-\varphi_1)].$$

Величина амплитуды результирующего колебания меняется со временем. Угловая скорость вращения вектора результирующей амплитуды не постоянна, следовательно, результирующее колебание не является гармоническим.

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2$; $A_1 = A_2$; и ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1\cdot A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t = 2A_1^2[1+\cos(\omega_2-\omega_1)t] = 4A_1^2\cos^2\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$$

$$A = |2A_1\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t| \ (8).$$

Изобразим на векторной диаграмме:

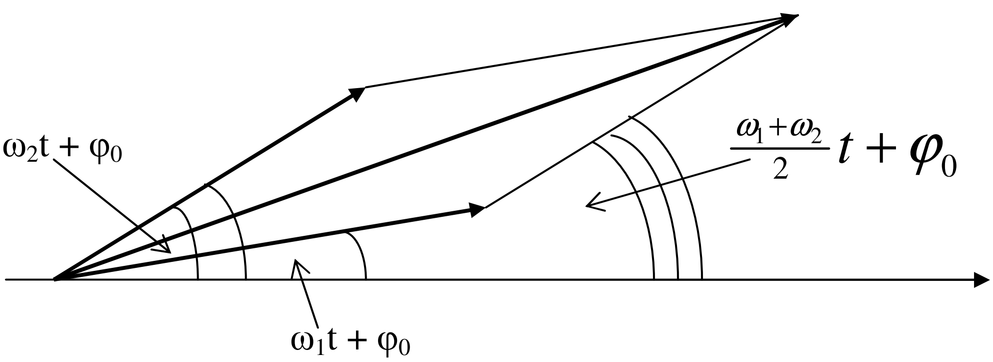


рис. 58

При ω_1 ~ ω_2 результирующий вектор вращается с постоянной скоростью.

Проекция но ось X:

$$x(t) = A\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \varphi_0)$$

Или:

$$x(t) = \left|2A_1 \cos \ \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \varphi_0) \quad (9).$$

Т.к. ω_2 ~ ω_1 , то результирующее колебание (9) можно рассматривать как гармоническое.

Негармонические колебания, получающиеся в результате наложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами, называются биениями (рис. 59).

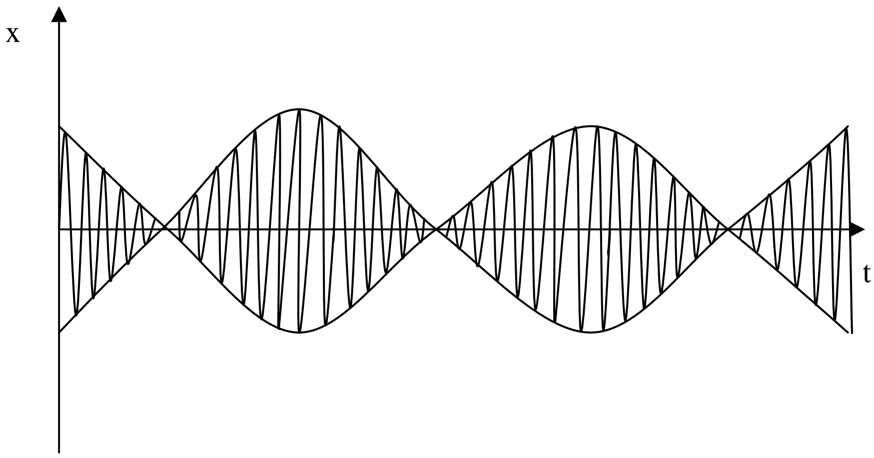


рис. 59

В результате сложения гармонических колебаний, совпадающих по направлению и имеющих кратные циклические частоты ω, 2ω, 3ω и т.д. получаются периодические негармонические колебания с периодом .

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Любое сложное периодическое колебание $x(t)$ на отрезке $(-l,l)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте

$$a_n \cos \tfrac{\pi n}{l} t \qquad b_n \sin \tfrac{\pi n}{l} t \qquad \omega = \tfrac{2\pi}{T} = \tfrac{2\pi}{2l} = \tfrac{\pi}{l}$$

$$x(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) =$$

$$= \tfrac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad (10).$$

(10)- разложение в ряд Фурье или гармонический анализ сложного периодического колебания.

$$a_0 = \tfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} x(t)dt \qquad a_n = \tfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} x(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \tfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} x(t) \sin n\omega t dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω, 2ω, 3ω и т.д. называются первой (или основной), второй, третьей и т.д. гармониками сложного периодического колебания.

Совокупность всех гармоник образуют спектр колебания $x(t)$.

Периодические колебания имеют дискретные (линейчатые) спектры частот. Непериодические колебания, как правило, имеют непрерывный (сплошной) спектр частот.

2) Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим результат сложения двух колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях. Пусть за направление колебаний возьмем оси X и Y. Рассмотрим случай двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковым периодом.

Уравнениями колебаний соответственно будут :

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (11).$$

Определим уравнение траектории точки: для этого из (11) исключим время.

$$\begin{cases} \frac{x}{A_1} = \cos\omega_0 t \cdot \cos\varphi_1 - \sin\omega_0 t \cdot \sin\varphi_1 \\ \frac{y}{A_2} = \cos\omega_0 t \cdot \cos\varphi_2 - \sin\omega_0 t \cdot \sin\varphi_2 \end{cases} \qquad (12) \text{ и } (13)$$

Умножим (12) на $\cos\varphi_2$ и (13) на $\cos\varphi_1$ и вычтем из (12) (13)

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega_0 t(\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2) =$$

$$= \sin\omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (14)$$

Умножим (12) и (13) на $\sin\varphi_2$, $\sin\varphi_1$ соответственно и возьмем, их разность:

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_1}\sin\varphi_1 = \cos\omega_0 t(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1) =$$

$$= \cos\omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (15)$$

Возведём (14) и (15) в квадрат и сложим почленно:

$$\frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi_2 - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \frac{y^2}{A_2^2}\cos^2\varphi_1 =$$
$$= \sin^2\omega t \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}\sin^2\varphi_2 - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \frac{y^2}{A_2^2}\sin^2\varphi_1 =$$
$$= \cos^2\omega t \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(16)

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

(16) – уравнение эллипса, характеристики которого определяются разностью фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\varphi_1=\varphi_2$ т.е. $\Delta\varphi=0$

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}=0$$

$$\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{A_1}{A_2}$ (17)

$$x=\frac{A_1}{A_2}y$$

(17) есть уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью X угол, tg которого равен $\frac{A_1}{A_2}$ (рис.60).

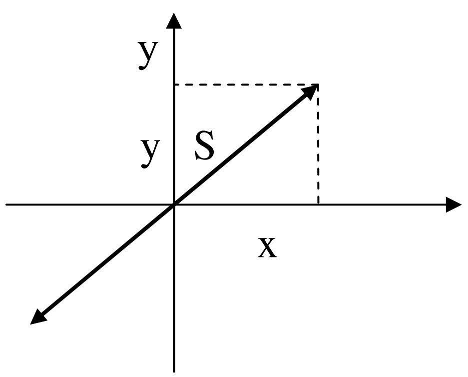


рис. 60

Результирующее колебание есть прямая линия. Такие колебания называются линейно поляризованными. Найдем выражение для длины отрезка S в любой момент времени.

$$S = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \qquad (18)$$

Амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad (19)$$

2. Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

Тогда уравнение (16) будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + 2\frac{xy}{A_1 A_2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2}$$

Результирующее колебание в этом случае: тоже линейно поляризованное колебание (рис.61).

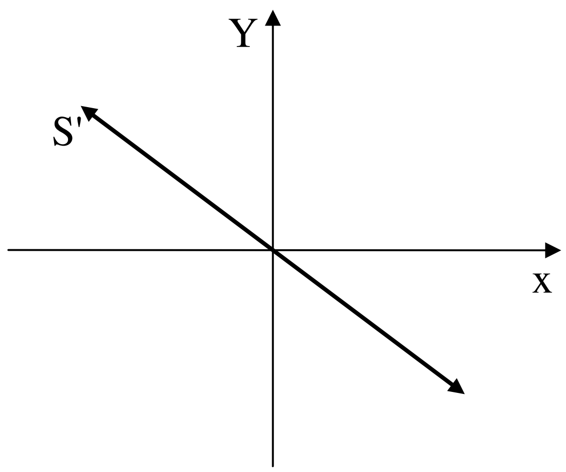


рис. 61

Длина отрезка S' такая же, как и (18), результирующая амплитуда: (19).

3. Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}(\frac{3}{2}\pi)$

Уравнение траектории в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Это есть уравнение эллипса (рис.62) и колебание является эллиптически поляризованным.

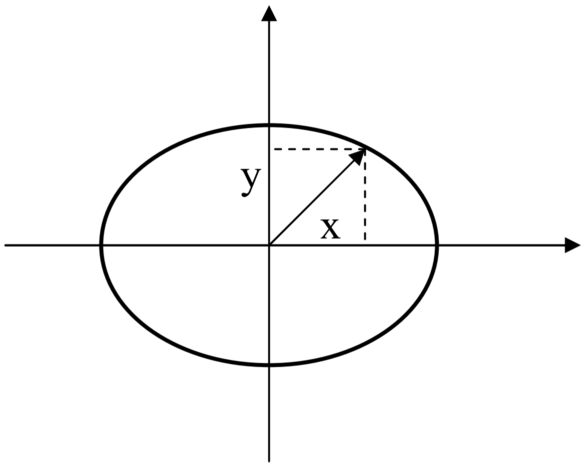


рис. 62

Если $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, то точка движется по часовой стрелке:

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = -A_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Если $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$, то точка движется против часовой стрелки.

Два взаимно перпендикулярных колебания

$$x = A \cos\omega t$$

$$y = A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

которые можно переписать в виде:

$$x = A \cos \omega t$$
$$y = -A \sin \omega t$$

дают в сумме равномерное движение по окружности радиуса А, с угловой скоростью ω, происходящее по часовой стрелке.

Все прочие разности фаз дают эллипсы вида (рис.63).

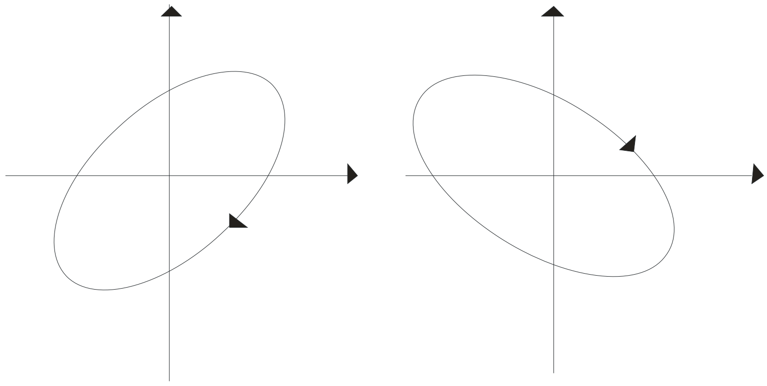


рис. 63

Когда частоты взаимно-перпендикулярных колебаний ω_x и ω_y заметно отличаются одна от другой, то траектория результирующего колебания получается сложной. Она упрощается, если частота одного из колебаний в целое число раз больше частоты другого. Пусть, например, период T_y колебаний в направлении у вдвое больше периода T_x колебаний в направлении х. ($\omega_x = 2\omega_y$). По прошествии одного периода колебаний T_y точка должна вернуться в исходное положение, так как за это же время прошло два периода T_x и, следовательно, отклонение в направлении у также должно повториться. Это означает, что траектория движения точки за период T_y замкнется. Но за время T_y точка дважды успеет пройти через крайние положения x_0 и $-x_0$ и один раз через крайние положения y_0 и y_0. Следовательно, траектория будет два раза касаться прямых $x = x_0$ и $x = -x_0$ и один раз $y = y_0$ и $y = -y_0$ (рис.64, 65).

При других соотношениях между частотами по осям х и у вид траекторий будет усложняться. Однако во всех случаях, хотя вид траекторий зависит от фаз обоих колебаний, число точек касания определяется только соотношением частот. Эти траектории носят название фигур Лиссажу. Если между обеими частотами нет простого кратного соотношения, то траектории движения являются незамкнутыми и вместо фигур Лиссажу получаются области, сплошь заполненные траекторией движущейся точки.

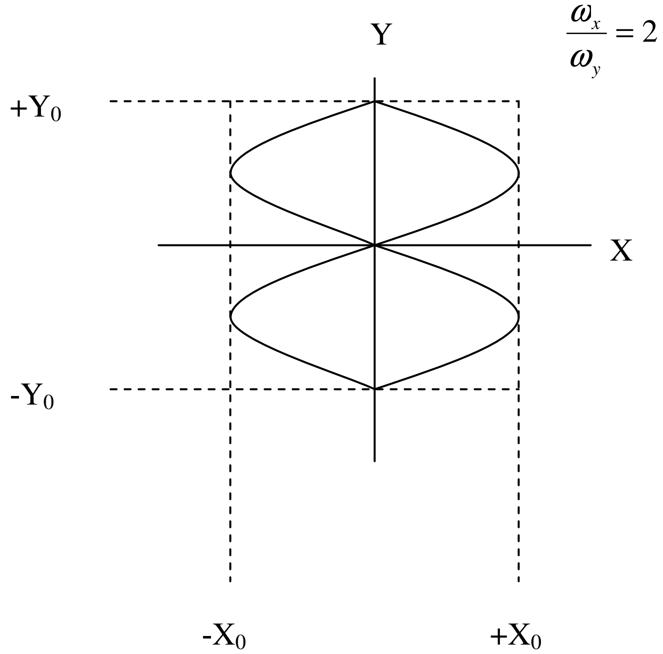


рис. 64

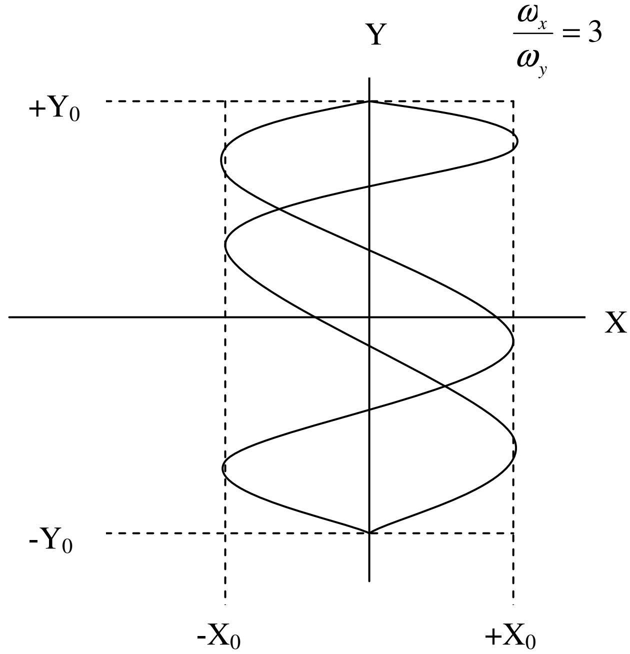


рис. 65

Рассмотрим возможность разложить прямолинейное колебание материальной точки на два круговых. Пусть точка участвует в двух смещениях у положения равновесия. Одно смещения представим вектором ОА, другое – вектором ОА'. Пусть длина каждого из векторов а. Результирующее смещение выражается геометрической суммой обоих смещений (рис. 66).

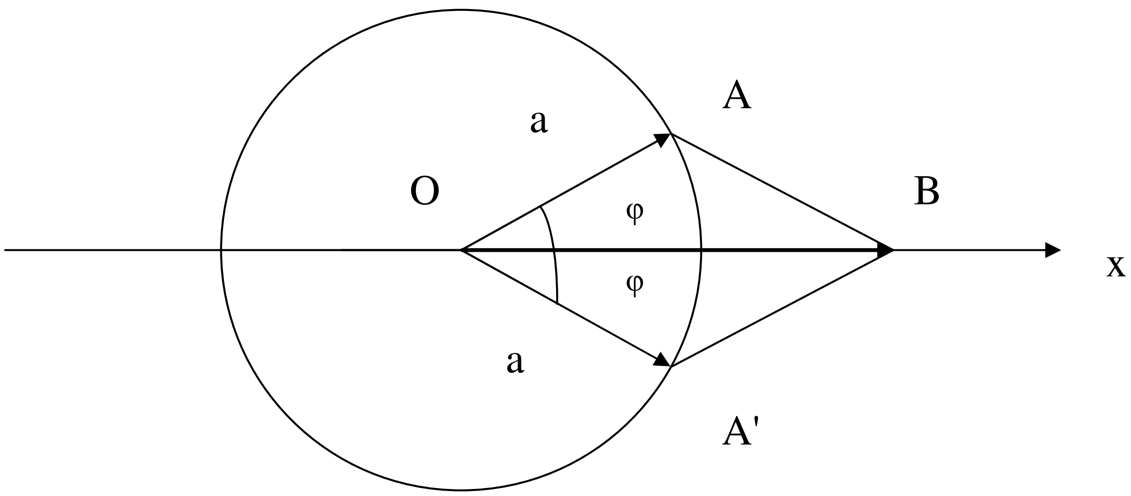


рис. 66

Пусть векторы смещений вращаются вокруг точки О в двух противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью ω. Результирующее смещение будет все время находиться на оси X.

Положение точки В на оси X в некоторый момент времени определяется выражением:

$$x(t) = 2a\cos(\omega t + \varphi),$$

Таким образом, результирующее смещение будет представлять собою гармоническое колебание с амплитудой, равной удвоенному радиусу окружности, по которой вращаются вектора ОА и OA_1. Следовательно: смещение при прямолинейном гармоническом колебании можно представить как геометрическую сумму двух векторов смещения, вращающихся в противоположных направлениях с угловой скоростью, равной круговой частоте колебаний. Величина векторов равна половине амплитуды колебания, и векторы расположены в каждый момент времени симметрично прямой, вдоль которой происходит колебание.

Собственные затухающие колебания.

На практике всякое колебание материальной точки, которое не поддерживается извне, затухает, амплитуда ее колебаний с течением времени уменьшается. Причина затухания: сила трения в месте подвеса, сила сопротивления среды. Рассмотрим случай, когда точка совершает прямолинейные колебания в вязкой среде (т.е. гармонический осциллятор в вязкой среде). Сила сопротивления среды зависит от скорости движения точки, и в случае малых скоростей ее можно считать пропорциональной скорости:

$$F_{сопр.} = -r\dot{x}$$

r - коэффициент сопротивления.

Запишем уравнение движения: $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}$

m**a** = Σ**F** $\quad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x} \quad (1)$$

Введем обозначения

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$ $\qquad\qquad$ $\frac{r}{m} = 2\beta$

С учетом обозначений из (1) получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Здесь ω_0 представляет собой собственную частоту колебаний гармонического осциллятора в отсутствие сопротивления среды.

Введем новую переменную z, которая связана со старой переменной x следующим образом:

$$x = ze^{-\beta t} \quad (3)$$

$$\dot{x} = \dot{z}e^{-\beta t} - \beta ze^{-\beta t} \quad (4)$$

$$\ddot{x} = \ddot{z}e^{-\beta t} - \beta\dot{z}e^{-\beta t} - \beta\dot{z}e^{-\beta t} + \beta^2 ze^{-\beta t} =$$

$$= \ddot{z}e^{-\beta t} - 2\beta\dot{z}e^{-\beta t} + \beta^2 ze^{-\beta t} \quad (5)$$

Найдем $\dot{x}$ и $\ddot{x}$

Подставим (3) (4) (5) в (2)

$$\ddot{z}\cdot e^{-\beta\cdot t} - 2\beta\dot{z}e^{-\beta\cdot t} + \beta^2 ze^{-\beta\cdot t} = -\omega_0^2 ze^{-\beta\cdot t} - 2\beta\dot{z}e^{-\beta\cdot t} + 2\beta^2 ze^{-\beta\cdot t}$$

$$\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z = -\omega_0^2 z - 2\beta\dot{z} + 2\beta^2 \quad (6)$$

$$\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2)z \quad (7)$$

Пусть сопротивление среды будет настолько мало, что $\omega_0^2 >> \beta^2$. Если сопротивление среды велико, то движение не будет периодическим.

Обозначим $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (8)$$

По аналогии можно написать решение уравнения (8) в виде:

$$Z = A_0\cos(\omega\cdot t + \varphi_0) \quad (9)$$

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Тогда период колебаний в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (10)$$

Период колебаний системы в вязкой среде больше периода колебаний системы бездействия сил сопротивления.

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $2\beta = \frac{r}{m}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{2\pi \cdot m}{\sqrt{km - \frac{r^2}{4}}} \qquad (11)$$

Подставим в (9) значение z:

$$\frac{x}{e^{-\beta \cdot t}} = A_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$x = A_0 e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \qquad (12)$$

Решение (12) представляет собой колебание с амплитудой

$A = A_0 e^{-\beta \cdot t}$, уменьшающейся с течением времени.

Получить решение уравнения (2) можно еще следующим способом.

Наличие сопротивления среды приводит к тому, что амплитуда колебаний уменьшается со временем. Поэтому будем искать решение уравнения (2) в виде

$$x = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (3)$$

где A(t) некоторая функция времени.

Продифференцировав (3) по времени t, найдем $\dot{x}$ и $\dot{x}^{\cdot}$

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\omega t + \varphi_0) - A\,\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}^{\cdot} = \ddot{A} \cos(\omega t + \alpha) - 2\ddot{A}\,\omega \sin(\omega t + \varphi_0) - A\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

После подстановки   и   в уравнение (2) после несложных преобразований получим

$$(\ddot{A} + \beta\dot{A} + (\omega_0^2 - \omega^2) A) \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\,\omega\,(\dot{A} + \beta A) \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Для того, чтобы полученное уравнение удовлетворялось при любых значениях t необходимо, чтобы коэффициенты при $\cos(\omega t + \alpha)$ и $\sin(\omega t + \alpha)$ были равны нулю, т.е.

$$\dot{A} + \beta A = 0 \qquad (4)$$

$$\ddot{A} + \beta\dot{A} + (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0 \qquad (5)$$

Уравнение (4) можно представить в виде $\frac{dA}{dt} = -\beta A$, откуда

$$\frac{dA}{A} = -\beta At \quad (6)$$

Интегрирование (6) дает

$$\ln A = -\beta t + \ln A_0 \qquad (7)$$

Потенцируя (7), получаем следующее выражение для A(t):

$$A = A_0 l^{-\beta t} \qquad (8)$$

$$\dot{A} = -\beta A \quad (9) \text{ и } \ddot{A} = -\beta^2 A \quad (10)$$

Подстановка (9) и (10) в (5) приводит к соотношению

$$\beta^2 A - 2\beta^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0,$$

из которого после сокращения на A получим:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

При условии $\omega_0^2 >> \beta^2$ величина ω будет вещественной и решение дифференциального уравнения (2) может быть представлено в виде (3)

$$x = A_0 l^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (11)$$

График зависимости смещения от времени при затухающих колебаниях (рис.67).

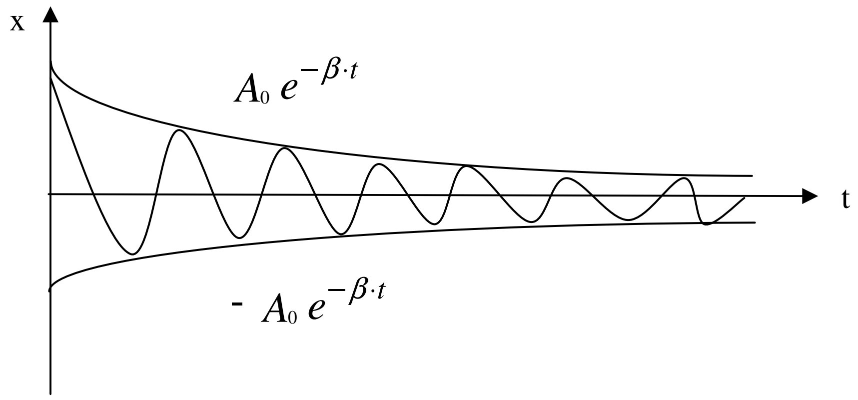


рис. 67

Логарифм отношения двух последовательных значений амплитуд, отстоящих друг от друга на время, равное периоду колебаний, называется логарифмическим декрементом затухания.

$$\lambda = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln\frac{1}{e^{-\beta\cdot t}} = \ln\ e^{\beta\cdot t}$$

Отсюда:

$$\lambda = \beta\cdot t \qquad (13) \qquad \text{или} \qquad \beta = \frac{\lambda}{T} \qquad (14)$$

Учитывая (13), (14) и $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим (12) в виде:

$$x = A_0\, e^{-\lambda\cdot\frac{t}{T}}\cos(\frac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi_0 \qquad (15)$$

Зная логарифмический декремент затухания, можно найти коэффициент сопротивления среды r.

$$2\beta = \frac{r}{m}; \qquad r = 2\beta m = 2\frac{\lambda}{T}\cdot m$$

Промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в е раз, называется временем релаксации.

$$t = \tau = \frac{1}{\beta}$$

Выясним физический смысл логарифмического декремента затуханий.

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

N – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в е раз. Логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в е раз.

Для характеристики колебаний системы часто употребляется величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N$$

которая называется добротностью колебательной системы. Добротность пропорциональна числу колебаний N, совершаемых системой за то время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз.

Найдем связь между логарифмическим декрементом затухания λ и циклической частотой ω затухающих колебаний системы. Учитывая

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad ; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

получим

$$\lambda = \beta T = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} * \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$$

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1} \qquad (16)$$

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} + 1}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2}} \qquad (17)$$

Случаи $\omega_0^2 = \beta^2$ и $\omega_0^2 < \beta^2$ дают апериодические затухающие движения. Они не являются колебаниями.

Пусть: $\beta^2 > \omega_0^2$

Решение уравнения затухающих колебаний в этом случае будет иметь вид:

$$x = Ae^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + Be^{-(\beta-\sqrt{\beta^2+\omega_0^2})t}$$

Из этого решения видно, что при неограниченном возрастании времени t смещение стремится к нулю асимптотически (рис.68).

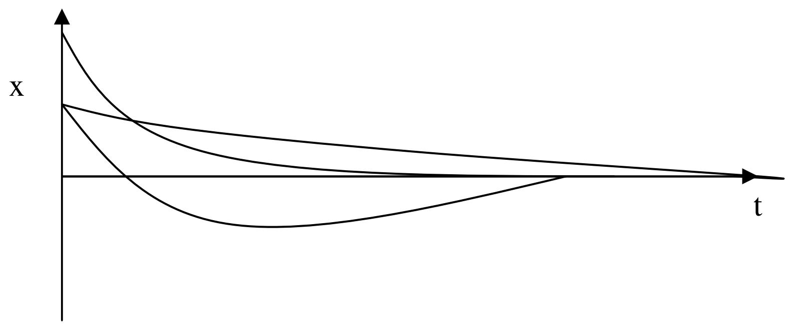


рис. 68

3. Критическое сопротивление

$$\omega_0^2 = \beta^2$$

Решение уравнения затухающих колебаний будет иметь вид:

$$x = e^{-\beta t}(A + Bt)$$

В этом случае период затухающих колебаний будет бесконечно большим.

Энергия при затухающих колебаниях

$$E_k = \frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{mx^2}{2};$$

$$E_n = \frac{kx^2}{2};$$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - A_0 e^{-\beta t} \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= -A_0 e^{-2\beta t} [\beta \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0)] \end{aligned} ;$$

$$x^2 = A_0 e^{-2\beta t} [\beta \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0)]^2;$$

$$E_k = A_0 \frac{m}{2} e^{-2\beta t} [\beta \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0)]^2;$$

$$E_n = A_0 \frac{k}{2} e^{-2\beta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Автоколебания.

При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, то колебания станут незатухающими. Пополнение энергии системы может осуществляться за счет толчков извне, но эти толчки должны сообщаться системе в такт с её колебаниями, в противном случае они могут ослабить ее колебания или прекратить совсем. Если колеблющаяся система сама управляет внешними воздействиями, то такая система называется автоколебательной, а совершаемые ею незатухающие колебания – автоколебаниями. Примером автоколебательной системы служит часовой механизм.

Вынужденные колебания при периодическом возмущении.

Рассмотрим колебательную систему, в которой действуют силы упругости, силы сопротивления и действует ещё периодическая сила.

Если на какую-либо систему действует периодически или почти периодически изменяющаяся внешняя сила, то эта система будет совершать колебания, характер которых в той или иной мере повторяет характер изменений внешней силы. Такие колебания называются вынужденными. Наиболее существенное отличие вынужденных колебаний от собственных и автоколебаний заключается в том, что частота этих колебаний определяется не свойствами самой системы, а частотой внешнего воздействия. Вынужденные колебания в системе устанавливаются не сразу, а постепенно. Для того, чтобы в системе установились стационарные вынужденные колебания, всегда должен пройти некоторый промежуток времени после начала действия внешней силы, в течение которого заканчивается процесс установления колебаний.Найдем уравнение установившихся вынужденных колебаний. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте внешнего воздействия.

Пусть эта периодическая сила изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

$$\psi(t) = \mathrm{F}_0 \cos \omega t$$

F_0 - амплитудное значение силы

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ - циклическая частота

Тогда уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{F_0}{m}\cos \omega t \qquad (2)$$

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} = \omega_0^2; \qquad 2\beta = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{m}}$$

$$\int = \frac{H_0}{m}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} + \int \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = \int \cos \omega t \qquad (3)$$

Будем искать решение уравнения (3) в виде:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (4)$$

(5) $\quad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \qquad (6)$$

Подставим (4) (5) и (6) в (3)

$$A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) + A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) + A\omega 2\beta\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = h\cos\omega t \quad (7)$$

Представим в виде векторных диаграмм (для t=0)

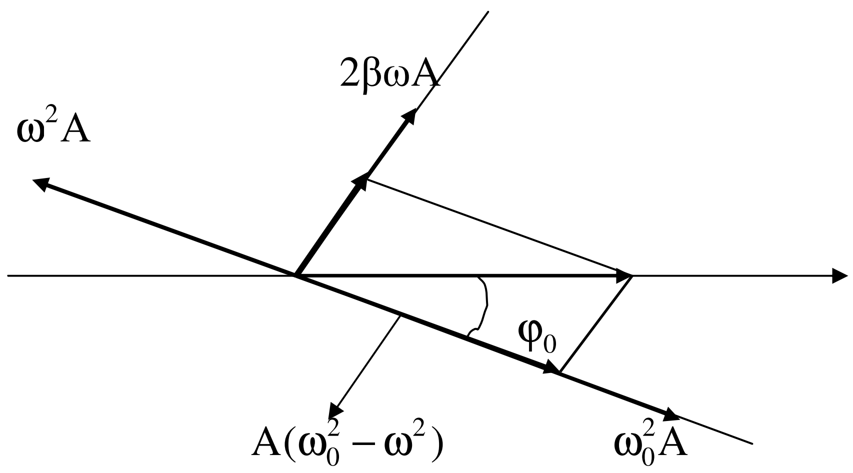


рис. 69

В начальный момент времени:

$$\omega^2 A + 2\beta\omega A + \omega_0^2 A = \eta$$

Будем искать амплитуду и фазу установившихся вынужденных колебаний. Для этого подставим (5) (6) (7) в (3)

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega_0^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) + 2\beta\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) + h\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Раскроем скобки:

$-A\omega^2(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0) = -\omega_0{}^2A(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0)$

$-2\beta\omega A(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0) + f\cos\omega t$

Приравняем коэффициенты при cosωt и sinωt

$$\begin{cases} -A\omega^2\cos\varphi_0 = -A\omega_0^2\cos\varphi_0 - 2\beta\omega A\sin\varphi_0 + f, \\ A\omega^2\sin\varphi_0 = A\omega_0^2\sin\varphi_0 - 2\beta\omega A\cos\varphi_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Или

$$\begin{cases} A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi_0 + 2\beta\omega A\sin\varphi_0 = f, \\ A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi_0 - 2\beta\omega A\cos\varphi_0 = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Из последнего уравнения системы (9) имеем:

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (10)$$

Возведем (9) в квадрат и сложим:

$A^2\,[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2] = f^2$

Отсюда: $A = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$ (11)

Следовательно, решение уравнения (3) будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t - \mathrm{arctg}\frac{2\rho\omega}{\omega_0^2-\omega^2})$$

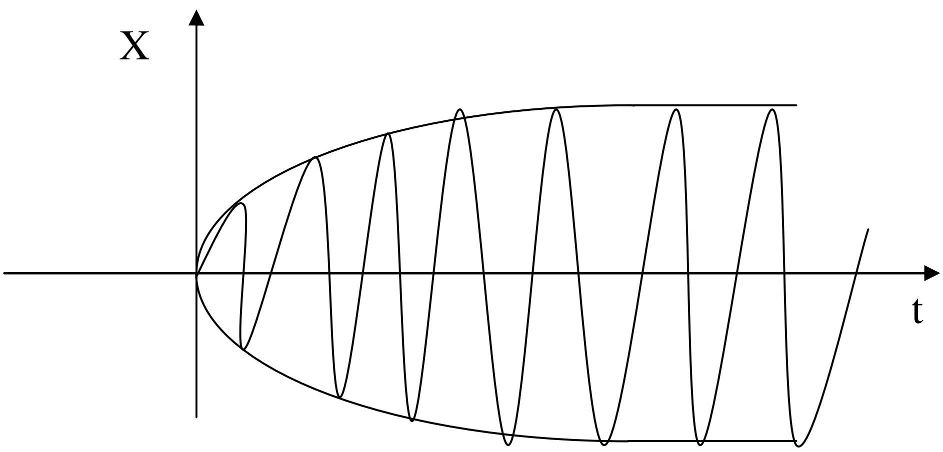


рис. 70

(10) и (11) представляют собой фазу и амплитуду вынужденных колебаний. Решения приближенные, т.е. мы учли, что затухающие колебания с течением времени перестают играть свою роль. Под действием внешней силы амплитуда будет возрастать, пока не достигнет своего значения (11) (рис. 71). Такие колебания называют установившимися.

Из (10) и (11) видно, что амплитуда и фаза колебаний зависят от соотношения частот вынуждающей силы и собственных колебаний.

Если сопротивление среды отсутствует (β=0), то фазы колебания и вынуждающей силы равны.

Пусть ω_0=const. Тогда, как видно из (11), при изменении частоты вынуждающей силы будет изменяться амплитуда вынужденных колебаний, амплитуда вынужденных колебаний будет иметь max при min в знаменателе в (11).

Выясним, как ведет себя амплитуда вынужденных колебаний при частотах ω внешнего воздействия, близких и далеких от собственной частоты колебаний ω_0 в случае, когда затухание колебаний невелико ($\beta^2 \ll \omega_0^2$).

При $\omega \ll \omega_0$ под корнем в выражении (11) играет роль только ω_0^2

$$A_0 = \frac{h}{\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \qquad (12)$$

Из (12) следует, что амплитуда вынужденных колебаний равна величине смещения груза, которое вызвало бы постоянная сила F_0. Когда частота ω приближается к частоте ω_0, амплитуда А возрастает и проходит через максимум при $\omega \approx \omega_0$. Приближенное значение этого максимума

$$A_{max} \approx \frac{F_0}{2\beta m\omega_0} \qquad (13)$$

При дальнейшем возрастании ω начинает играть роль $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ и А начинает убывать. Когда $\omega \gg \omega_0$

$$X \approx \frac{F_0}{m\omega^2}$$

При увеличении частоты воздействия амплитуда колебаний стремиться к нулю.

Картина изменения амплитуды вынужденных колебаний при изменении частоты внешнего воздействия при β = const изображена на рис. Как видно из выражений (12) и (13) отношения между максимальной амплитудой A_{max} вынужденных колебаний и A_0 зависит только от коэффициента затухания β: $\frac{A_{max}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$ (15)

Из (15) следует, что если $\beta << 1$, то $A_{max} >> A_0$. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой. Изображенная на рис.71 совокупность графиков функции (11) называется амплитудными резонансными кривыми, на рис.72 фазовые резонансные кривые функции (10).

$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ (13) – резонансная частота.

Если сопротивление среды равно нулю, то max амплитуды получается при $\omega_{рез} = \omega_0$, в этом случае амплитуда колебаний становится бесконечно большой (рис.69).

С явлением резонанса приходиться считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий. Вместе с тем явление резонанса оказывается в акдетике, радиотехнике и т.д. Явление резонанса представляет собой один из наиболее удобных способов измерений частот колебаний. Явление резонанса позволяет обнаружить очень слабые колебательные воздействия, т.е. дает очень чувствительный способ обнаружения и измерения колебаний.

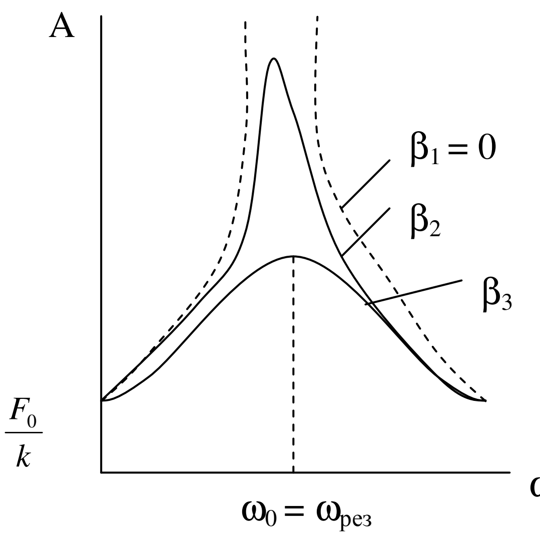


рис. 71

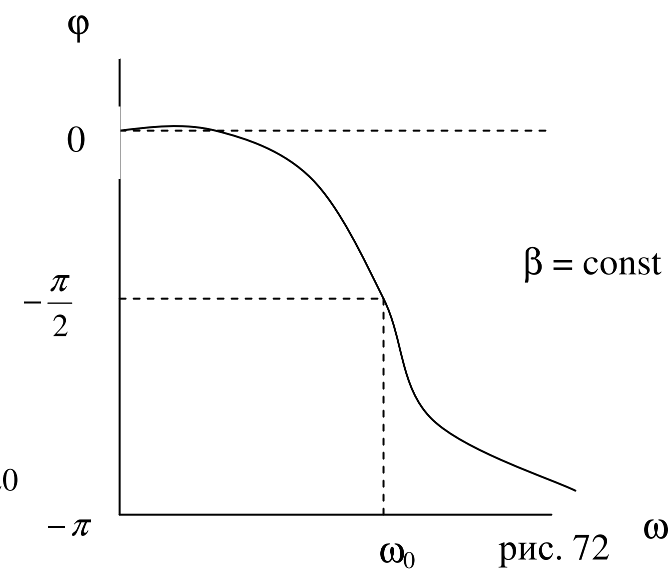


рис. 72

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{рез}$ нужно найти минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе (11).

Продифференцировав это выражение по ω и приравняв к нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\,\omega + 8\beta^2\omega = 0 \qquad (16)$$

Из (16)

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad (17)$$

Подставив (17) в (11) получим выражение для амплитуды при резонансе f

$$A_{рез} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \qquad (18)$$

Представление негармонических колебательных процессов при помощи гармонических колебаний

До сих пор мы рассматривали в основном простые гармонические колебания, т.е. движение, при котором смещение из положения равновесия имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } \qquad x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

Однако реальные колебательные процессы носят более сложный характер, чем гармонические. Но, т.к. любое сложное колебание можно представить как сумму гармонических колебаний, то рассмотрение гармонических колебаний важно.

Рассмотрим два колебания

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi), \qquad (1)$$

у которых ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга.

При сложении эти два колебания дают колебание с амплитудой

$$A = \left|2A_1\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right| \qquad (2)$$

Обратно мы можем сказать, что колебание, амплитуда которого меняется по закону (2) может быть разложено на два простых колебания.

Пусть имеется колебание, амплитуда которого медленно (по сравнению с периодом самих колебаний) меняется по какому-нибудь закону. Такие колебания называются модулированными.

Модулированное колебание не является гармоническим, но может быть представлено как сумма гармонических колебаний.

Возьмём для примера колебание

$$x = A\cos \omega_0 t \qquad (3),$$

амплитуда которого меняется по закону: $A = A_1 + A_2 \cos\omega t$(4)

Пусть $A_2 < A_1$ и $\omega << \omega_0$.

Закон движения (3) при условии (4) означает, что амплитуда изменяется во времени между значениями $A_1 + A_2$ и $A_1 - A_2$.

Подставим (4) в (3).

$$x = (A_1 + A_2 \cos \omega t) \cdot \cos \omega_0 t =$$

$$= A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos(\omega t) \cdot \cos \omega_0 t =$$

$$= A_1 \cos \omega_0 t + \tfrac{A_2}{2} \cos(\omega_0 + \omega)t + \tfrac{A_2}{2} \cos(\omega_0 - \omega)t$$

Таким образом, сложное колебание (3) может быть разложено на сумму трех гармонических колебаний с частотами $\omega_0 - \omega$; ω_0; $\omega_0 + \omega$ и амплитудами $\frac{A_2}{2}$; A_2; $\frac{A_2}{2}$. (рис. 73)

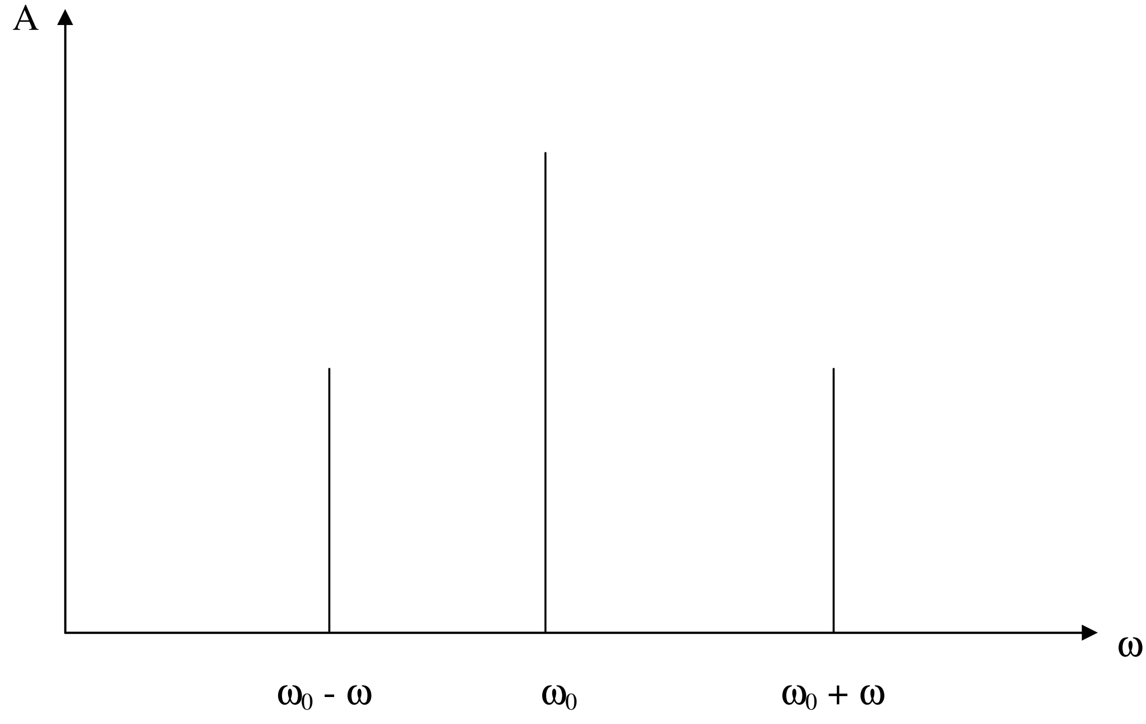


рис. 73

Результат сложения двух гармонических колебаний зависит от *ω, A и* φ_0.

Любую функцию, заданную на интервале от $-l$ до l, можно представить в виде ряда

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{l} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots +$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

Для четной функции $f(-x) = f(x)$,

коэффициенты $B = 0$.

Для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$,

коэффициенты A=0.

Мы рассматривали разложение периодических сложных колебательных движений на сумму простых гармонических. Но движение может быть колебательным, но не периодическим. В качестве примера можно привести затухающие колебания.

Такое непериодическое движение также можно разложить в ряд Фурье, но спектр частот в простых гармонических колебаниях будет непрерывным.

Параметрический резонанс

Незатухающие колебания могут возбуждаться не только под действием внешней периодической силы, но также при периодическом изменении параметров колебательной системы.

Такое возбуждение колебаний называется параметрическим резонансом.

Пример: раскачивание качелей человеком, регулярно приседающим и поднимающимся и, тем самым, периодически перемещающим центр тяжести системы.

Для выяснения механизма этого способа возбуждения колебаний рассмотрим пример: маятник, длину подвеса которого можно менять, подтягивая и отпуская нить, переброшенную через блок.

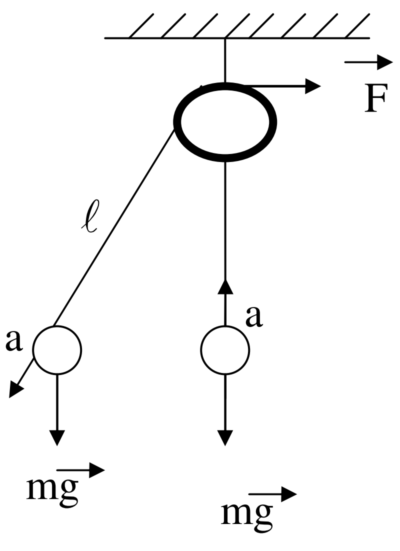


рис. 74

Пусть в момент каждого прохождения через положение равновесия маятник подтягивается внешней силой F на некоторую небольшую высоту a (малую по сравнению с длиной ℓ маятника) Пусть в каждом крайнем положении нить отпускается на ту же длину a. Следовательно, в течение каждого периода маятник будет дважды удлинен и дважды укорочен. Другими словами: частота периодического изменения параметра (длины маятника) будет вдвое больше частоты его собственных колебаний.

Т.к. удлинение нити происходит при наклонном положении маятника, то в эти моменты он опускается на высоту $a\cos\varphi_0$, меньшую чем высота его подъема в моменты подтягивания нити. За каждое подтягивание и отпускание нити действующая на нить внешняя сила производит против силы тяжести работу, равную

$$mga - mga\cos\varphi_0 = mga(1-\cos\varphi_0)$$

Разложим $\cos\varphi_0$ в ряд Тейлора в окрестности φ_0 (считая φ_0 - малым)

$$\cos\varphi_0=1-\frac{\varphi_0^2}{2}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...$$

Тогда работа

$$\frac{1}{2}mga\varphi_0{}^2$$

Кроме того, внешняя сила производит работу против центробежной силы (растягивающей нить) и равной $F_ц=\frac{mv_0^2}{l}$, v_0 - максимальная скорость маятника в положении равновесия. Суммарная работа внешней силы за период колебаний маятника равна

$$A=2(\frac{1}{2}mga\varphi_0{}^2+\frac{mv_0^2}{l}a) \qquad (1)$$

$$v_0=l\varphi_0\omega,\ \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\varphi_0{}^2=\frac{v_0^2}{e^2\omega^2}=\frac{v_0^2 l}{e^2 g}=\frac{v_0^2}{lg}$$

Подставим в (1):

$$A=2(\frac{1}{2}mga\frac{v_0^2}{lg}+\frac{mv_0^2}{l}a)=2(\frac{1}{2}ma\frac{v_0^2}{l}+ma\frac{v_0^2}{l})=6\frac{a}{l}\frac{mv_0^2}{2} \qquad (2)$$

Из (2) следует, что работа внешней силы, производимая над маятником, положительна и пропорциональна его энергии.

Поэтому энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии и величине $\frac{a}{l}$

Вот в этом и заключается механизм параметрического резонанса. Периодическое изменение параметров колебательной системы (с частотой, удвоенной по сравнению с собственной частотой системы) приводит к систематическому возрастанию ее средней энергии, причем скорость этого возрастания пропорциональна Е:

$$\frac{dE}{dt}=2æE$$

где æ – малая постоянная, называемая коэффициентом усиления.

$\frac{dE}{dt}>0$ => энергия и амплитуда колебаний будет возрастать во времени:

$$\frac{dE}{E}=2æ dt$$

$$\ln E=2æt+C$$

$$E=e^{2æt+C}=e^{c}e^{2æt}=c_1e^{2æt}$$

$$\boxed{E=c_1e^{2æt}}$$

Но в системе всегда есть трение, вызывающее затухание колебаний. Поэтому для параметрического возбуждения колебаний необходимо, чтобы коэффициент усиления превосходил коэффициент затухания, обусловленный трением. Математическое описание параметрического резонанса в линейных системах производится с помощью линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\ddot{x}+\psi_1(t)\dot{x}+\psi_2(t)x=0 \qquad (3)$$

$\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ - периодические функции времени.

Подстановкой

$$x=z\exp\left(-\frac{1}{2}\int\psi_1(t)dt\right) \qquad (4)$$

Уравнение (3) преобразуется к уравнению Хилла

$$\ddot{z}+\xi(t)z=0 \qquad (5)$$

Где $\xi(t)=\psi_2(t)-\frac{1}{2}\psi_1(t)-\frac{1}{4}\psi_1^2(t)$ (6)

Частным случаем уравнения Хилла является уравнение Матьё

$$\ddot{y} + \omega_0^2 (1 + m \cos pt) y = 0 \qquad (7)$$

Где p – частота изменения параметра

$p = \frac{2\omega}{n}$; n=1, 2, …

ω = частота возбуждаемых колебаний.

m – глубина модуляции параметра

Теория уравнений (3), Хилла и Матьё полностью разработана, и известны все решения.

Обычно решения уравнения (3) записываются в виде:

$$x = c_1 \varphi(t) e^{\lambda t} + c_2 \varphi(-t) e^{-\lambda t} \qquad (8)$$

Где φ(t) – ограниченные периодические функции с периодом, равным периоду изменения параметра или половине этого периода

Λ – комплексная величина, которая называется характеристическим показателем. Вещественная часть ее определяет, имеет ли решение (8) возрастающий характер или нет. Полный анализ уравнений (3)(5)(7) математически довольно сложный, поэтому он сводится к нахождению таких областей значений соотношения частот $\frac{2\omega_0}{p}$ и глубины модуляции m, для которых имеются комплексные значения λ. Тогда в системе могут происходить нарастающие колебания, т.е. возникает параметрический резонанс.

Представление колебательных процессов с помощью комплексных чисел.

Комплексное число $z = ae^{i\varphi}$ может быть представлено в виде

$z = ae^{i\varphi} = a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - формула Эйлера.

$\operatorname{Re} z = a\cos\varphi$ - вещественная часть комплексного числа.

$\operatorname{Im} z = a\sin\varphi$ - мнимая часть комплексного числа.

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\end{aligned}\right\}$$ - Формулы Муавра.

Гармоническое колебательное движение может быть представлено вещественной частью комплексного числа $z = a\exp[i(\omega t+\varphi_0)]$, т.е.

$$x = a\cos(\omega t+\varphi_0)$$

При решении многих задач важно знать квадрат амплитуды, т.к. энергия колебаний пропорциональна a^2.

Пусть $z^* = a\exp[-i(\omega t+\varphi_0)]$ - комплексно сопряженное число, тогда

$$z\cdot z^* = a^2$$

Можно и амплитуду а представить в виде комплексного числа.

$$a = a_0 e^{i\varphi_0}$$

Тогда $z = a_0 e^{i\varphi_0} e^{i(\omega t+\varphi)} = a = a_0 e^{i(\omega t+\varphi+\varphi_0)}$

$\mathrm{Re}\, z = |z| = a_0\cos(\omega t+\varphi+\varphi_0)$ - гармоническое колебание с амплитудой a_0 и начальной фазой $(\varphi+\varphi_0)$. Но и в этом случае $z\cdot z^* = a^2$.

Чтобы выяснить удобство пользования комплексными числами, рассмотрим задачу о сложении колебаний происходящих вдоль одной прямой с одинаковыми частотами.

$$x_1 = a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)}$$

$$x_2 = a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

Результирующее колебание:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

При этом

$$a^2 = x\cdot x^* = [a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}][a_1 e^{-i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{-i(\omega t+\varphi_2)}]$$

Отсюда: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2[e^{i(\varphi 2-\varphi 1)} + e^{-i(\varphi 2-\varphi 1)}]$

Используя формулы Моавра, имеем:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Элементы механики сплошных сред

Движение идеальной жидкости

Мы рассматривали движение тел, сводящееся к их перемещению относительно других тел или вращения их относительно неподвижной оси. Однако возможно движение, которое сводится к перемещению различных частей тела друг относительно друга, при этом, если тело рассматривается как бесконечно большое, то его называют сплошной средой.

Рассмотрим движение жидкости, которое будем считать абсолютно несжимаемой и в которой перемещение одних слоев относительно других происходит без трения (т.е.отсутствует вязкость).Такая жидкость абсолютно несжимаемая и абсолютно невязкая называется идеальной.

Определим движение частиц жидкости относительно некоторой системы отсчета. Каждой частице соответствует свой вектор скорости. Вся жидкость представляет собой поле вектора скорости. В поле вектора скорости мы можем провести линии, касательные к которым совпадают с направлением скорости частицы жидкости в данной точке. Такие линии называются линиями тока. Часть жидкости, ограниченной линиями тока, называется трубкой тока.

Выберем в трубке тока два нормальных сечения ΔS_1 и ΔS_2. (рис.75)

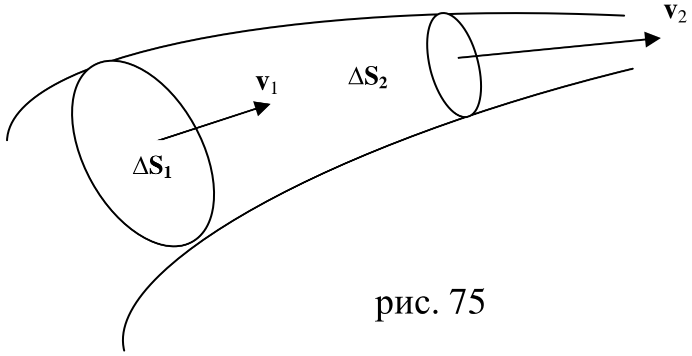


рис. 75

За единицу времени через сечение $\Delta \mathbf{S}_1$ протечет объем жидкости $\Delta S_1 \cdot \mathbf{V}_1$, через сечение $\Delta \mathbf{S}_2$ - $\Delta S_2 \cdot \mathbf{V}_2$.

Для несжимаемой жидкости:

$$\Delta S_1 \cdot \mathbf{V}_1 = \Delta S_2 \cdot \mathbf{V}_2$$

Следовательно, $\Delta S \cdot \mathbf{v} = const$ – теорема о неразрывности струи.

Произведение скорости течения несжимаемой невязкой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

Уравнение Бернулли

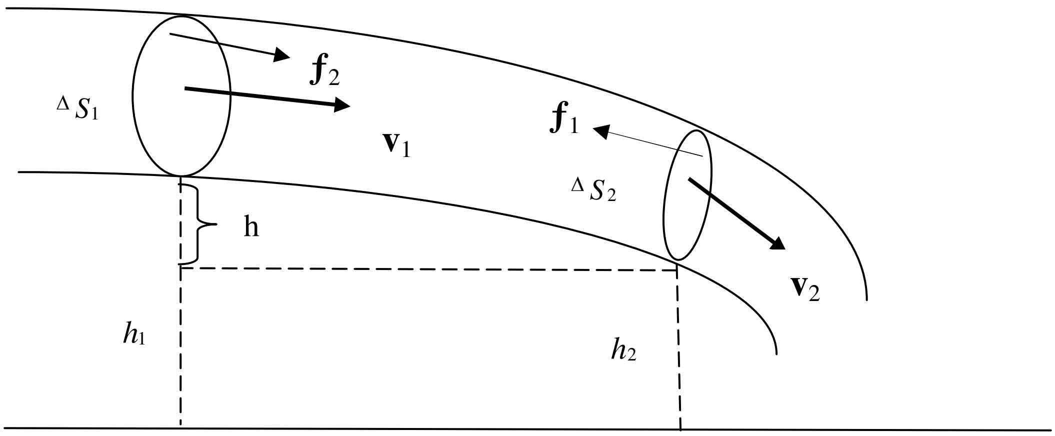


рис. 76

Рассмотрим некоторую массу жидкости, протекающей через сечение ΔS_1, потом через сечение ΔS_2.

Скорость жидкости в месте сечения ΔS_1 - $\mathbf{v}_1$, давление P_1, в месте сечения ΔS_2 – соответственно $\mathbf{v}_2$ и P_2. Пусть трубка тока расположена не горизонтально, а под наклоном. Высота в месте сечения ΔS_1 - h_1, в месте сечения ΔS_2 – h_2.

При протекании массы жидкости Δm совершается работа, т.к. действует сила, обусловленная наличием в жидкости давления P.

Пусть E_1 – полная энергия массы жидкости в месте сечения ΔS_1 ,E_2 – полная энергия массы жидкости в месте сечения ΔS_2. По закону сохранения энергии изменение энергии равно работе внешних сил: $E_2 - E_1 = A_1 + A_2$, A_1 и A_2 – работы, совершенные за время Δt силами, действующими на сечение ΔS_1 и ΔS_2.

$$E_1 = \frac{\Delta m \mathbf{V}_1^2}{2} + \Delta mgh_1 \qquad E_2 = \frac{\Delta m \mathbf{V}_2^2}{2} + \Delta mgh_1$$

Сила, действующая на сечение ΔS_1 со стороны жидкости

$f_1 = p_1 \Delta S_1$, на сечение $\Delta S'_2$ - $f_1 = P_2 \Delta S_2$

За время Δt масса жидкости Δm сместится на отрезок $\Delta l_1 = \mathbf{V}_1 \Delta t$.

Тогда $A_1 = f_1 \Delta l_1 = p_1 \Delta S_1 \mathbf{V}_1 \Delta t$, $\quad A_2 = -f_2 \Delta l_2 = -p_2 \Delta S_2 \mathbf{V}_2 \Delta t$.

Тогда:

$$\frac{\Delta m \mathbf{V}_2^2}{2} + \Delta mgh_2 - \frac{\Delta m \mathbf{V}_1^2}{2} - \Delta mgh_1 = p_1 \Delta S_1 V_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 V_2 \Delta t$$

.

$$\frac{\Delta m V_1^2}{2} + \Delta mgh_1 + p_1 \Delta S_1 \mathbf{V}_1 \Delta t = \frac{\Delta m V_2^2}{2} + \Delta mgh_2 + p_2 \Delta S_2 \mathbf{V}_2 \Delta t$$

.

По закону непрерывности струи, объем, занимаемый массой жидкости, остается постоянным: $\Delta V = \Delta S_1 \mathbf{V}_1 \Delta t = \Delta S_2 \mathbf{V}_2 \Delta t$.

Разделим правую и левую части на ΔV и, учитывая, что $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$, получим:

$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2$ - уравнение Бернулли.

Для трубки тока, расположенной горизонтально:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + p_2.$$

Уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии при установившемся движении идеальной жидкости. Это уравнение справедливо для любого движущегося объема идеальной жидкости вдоль траектории его движения, вдоль линий тока. Однако, несмотря на то, что это уравнение было получено для движения идеальной жидкости, оно достаточно хорошо описывает движение реальной жидкости, вязкость которой достаточно мала.

Уменьшение давления жидкости в точках, где скорость потока больше, положено в основу устройства водоструйного насоса.

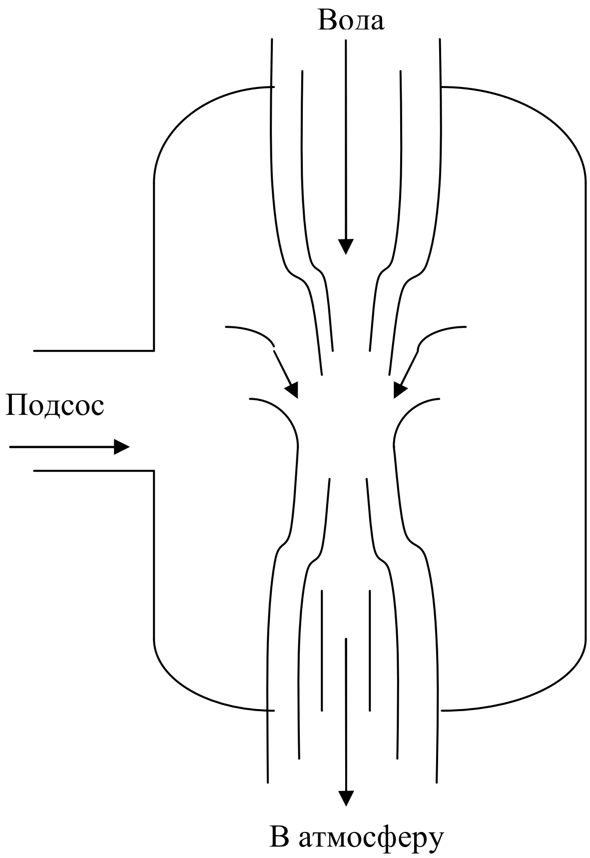


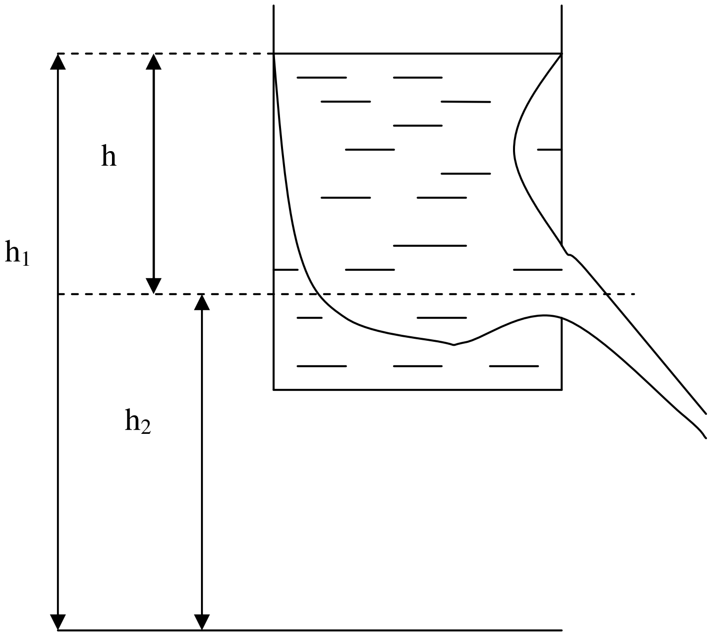
рис. 77

Струя воды подается в трубку, которая открывается в атмосферу, следовательно на выходе из трубки давление равно атмосферному. В трубке делается сужение, по которому вода идет с большей скоростью, и давление в этом месте оказывается меньше атмосферного, струя будет тогда оказывать засасывающее действие. На этом засасывающем действии суженной струи основана работа пульверизатора и водо

Истечение жидкости из отверстия

Применим уравнение Бернулли к случаю истечения жидкости из небольшого отверстия в широком открытом сосуде. Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своим сечением с одной стороны открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны

– отверстие, через которое жидкость вытекает. Уравнение Бернулли для этого случая:



$$\rho g h_1=\frac{\rho v^2}{2}+\rho g h_2$$

v – скорость истечения жидкости из отверстия. Учитывая h_1- h_2=h – высота поверхности от крытой жидкости над отверстием и сокращая на ρ получим

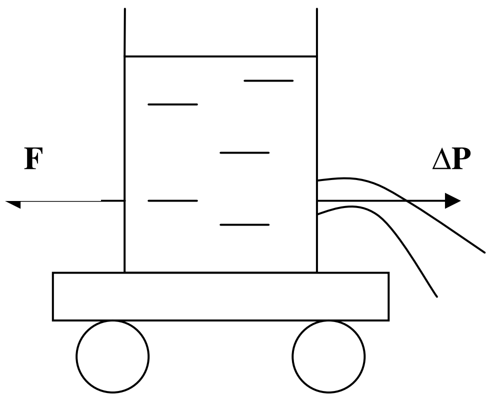
$$\frac{v^2}{2}=gh \text{ или } v=\sqrt{2gh}$$ -

рис. 78

формула Торричелли.

Применение закона сохранения импульса к движению жидкости

Струя жидкости, вытекающая из отверстия в сосуде, уносит за собой за время Δt импульс $\Delta \mathbf{P}=\rho S v \mathbf{v} \Delta t$ (рис.79) ($\mathbf{v}$ – вектор скорости истечения струи, S – площадь отверстия). Учитывая, что $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ = $\mathbf{F}$, имеем по третьему закону Ньютона:



$F=-\frac{d\mathbf{P}}{dt}=-\rho S v \mathbf{v}$ – эта сила есть реакция вытекающей струи. Численное значе

рис. 79

ние этой силы

$F=\rho S v^2=2gh\rho S$

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет.

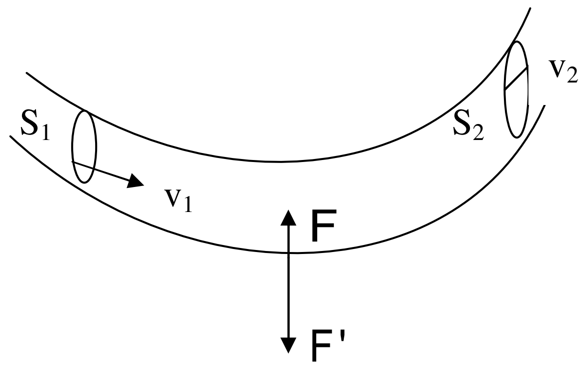


рис. 80

При истечении жидкости по изогнутой трубе с постоянной по модулю скоростью импульс любого объема V жидкости непрерывно меняется за счет изгибания трубок тока жидкости. За время Δt через некоторое сечение S1'перенесется масса жидкости. $m = \rho S_1 \mathbf{v}_1 \Delta t$

Импульс этой массы жидкости

$$\mathbf{P}_1 = \rho S_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 \Delta t$$

У второго сечения трубы

$$\mathbf{P}_2 = \rho S_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 \Delta t$$

Если сечение трубы постоянно, то

$$S_1' = S_2' = S'; \qquad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

И изменение импульса будет:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \rho S \mathbf{v}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\Delta t$$

Учитывая, что $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}$ имеем

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta \mathbf{P} = \rho S \mathbf{v}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\Delta t$$

Или

$$F = \rho S \mathbf{v}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

По третьему закону Ньютона, жидкость текущая по изогнутой трубе действует на трубу с силой F′=F направленной в сторону, противоположную изгиба трубы.

Уравнение Навье-Стокса

Это дифференциальное уравнение, описывающее движение вязкой жидкости или газа.

Для несжимаемой (ρ=const) и ненагреваемой (T=const) жидкости уравнение Навье-Стокса имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{gradP} + \nu\Delta^2\mathbf{v}$$

где **F** – объёмная сила

P - давление

v - скорость течения

$\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ - кинематический коэффициент вязкости

μ - динамический коэффициент вязкости

Сила внутреннего трения

В реальных жидкостях и газах при перемещении слоев относительно друг друга с различными скоростями происходят процессы, стремящиеся выровнять скорости движения слоев. Эти процессы носят название внутреннего трения или вязкостью. Выравнивание скоростей движения слоев осуществляется переносом импульса из одного слоя в

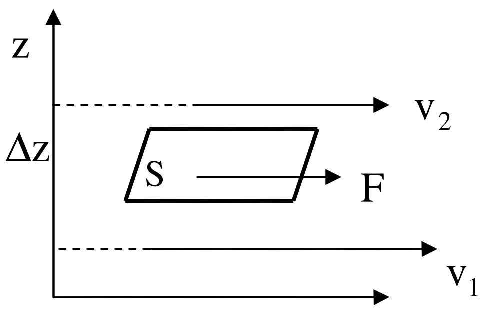


рис. 81

другой в направлении, перпендикулярном направлению к направлению движения этих слоев. При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоев (увеличение или уменьшение). Это означает, что на каждый слой действует сила, равная изменению импульса в единицу времени. Эта сила представляет собой силу трения между слоями жидкости или газа, движущимися с различными скоростями. Сила внутреннего трения направлена по касательной к поверхности слоев, движущимися с разными скоростями. (рис.81)

$$\mathbf{F} = \eta \frac{d\mathbf{v}}{dz} S$$

Здесь: S – площадь поверхности, разделяющей два соседних слоя жидкости или газа,

$\frac{d\mathbf{v}}{dz}$ - градиент скорости (величина, показывающая как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою),

η - коэффициент внутреннего трения или коэффициент вязкости.

Размерность коэффициента вязкости $\dim\eta = L^{-1}MT^{-1}$, единица вязкости в системе СГС – пуаз (в честь французского ученого Пуазейля); в системе СИ - паскаль·секунда. Коэффициент вязкости зависит от температуры: с повышением температуры коэффициент вязкости сильно уменьшается, у газов – растет. Отличие в характере поведения коэффициента внутреннего трения при изменении температуры указывает на различие механизма внутреннего трения в жидкостях и газах. В жидкостях движущиеся слои обмениваются импульсами из-за наличия сил сцепления между молекулами, в газах – в результате перехода молекул из слоя в слой вследствие теплового движения.

Ламинарное и турбулентное течения

Течение вязкой жидкости может быть слоистым (ламинарным) или вихревым (турбулентным). При ламинарном течении слои жидкости скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Ламинарное течение является стационарным течением. При турбулентном течении скорость частиц в каждом данном месте изменяется беспорядочно, идет перемешивание жидкости. Турбулентное движение является не стационарным. Характер течения жидкости зависит от значения некоторой безразмерной величины, которая называется числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}$$

ρ - плотность

v – средняя по сечению скорость течения жидкости

l – характерный для поперечного сечения размер (сторона квадрата - при квадратном сечении; радиус или диаметр – при круглом сечении).

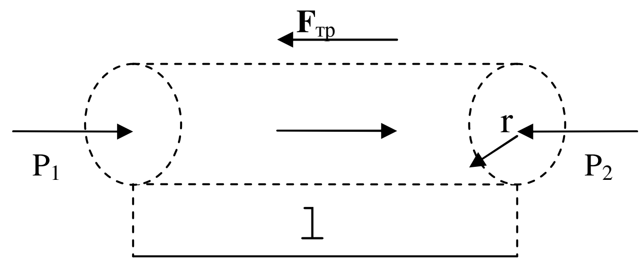
При малых значениях числа Рейнольда Re - течение ламинарное, при значениях больших критического – турбулентное. При круглом сечении критическое значение $\mathrm{Re} \sim 10^3$.

Течение жидкости в круглой трубе

Внутреннее трение является причиной того, что для протекания жидкости (или газа) через трубу требуется некоторая разность давлений. Эта разность давлений должна быть тем больше, чем больше коэффициент внутреннего трения η. При движении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенок трубы и максимальна на оси трубы.

Полагая, что течение ламинарное, найдем закон изменения скорости с расстоянием от оси трубы.

Выделим некоторый объем жидкости длиной l и радиусом r. (рис.82)



При стационарном течении в трубе постоянного сечения скорости всех частиц жидкости остаются неизменными. Следовательно, сумма внешних сил, приложенных к любому объему жидкости, равна нулю. На основания выбранного цилиндра действуют силы давления, сумма которых

$$(P_1-P_2)\pi r^2$$

На боковую поверхность действует сила трения:

$$\eta\left|\frac{dv}{dr}\right|2\pi rl$$

Условие стационарности:

$$(P_1-P_2)\pi r^2=\eta\left|\frac{dv}{dr}\right|2\pi rl$$

Так как скорость убывает с расстоянием от оси трубы, то

$$\left|\frac{dv}{dr}\right|=-\frac{dv}{dr}$$

Тогда:

$$-\frac{dv}{dr}=\frac{(P_1-P_2)}{2\eta l}r$$

Разделим переменные:

$$dv=-\frac{(P_1-P_2)}{2\eta l}rdr$$

Проинтегрируем:

$$v=-\frac{P_1-P_2}{4\eta l}r^2+C$$

Постоянную C выберем из условия v=0 при r=R. Отсюда

$$C=\frac{P_1-P_2}{4\eta l}R^2$$

Следовательно:

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}(R^2 - r^2) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

На оси трубы:

$$v_0 = v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$$

Или

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

С учетом этого при ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону. (рис.83)

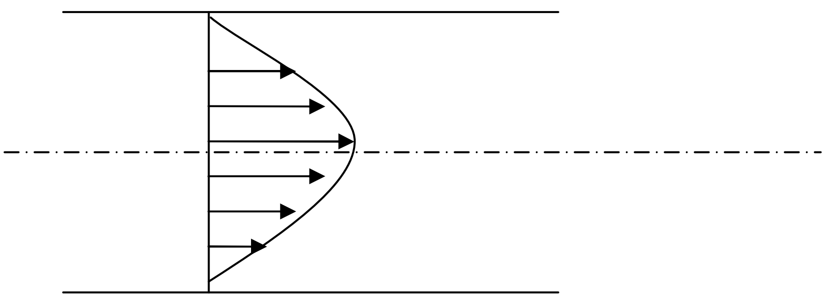


рис. 83

При турбулентном течении скорость в каждой точке меняется беспорядочным образом, но при неизменных внешних условиях постоянной оказывается средняя скорость в каждой точке сечения трубы и профиль средних скоростей выглядит следующим образом: (рис.84)

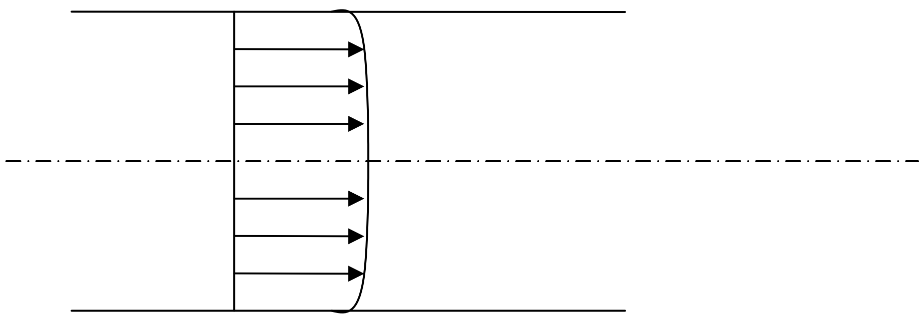


рис. 84

Движение тел в жидкостях и газах.

При движении тела в жидкости или газе на него воздействуют силы, равнодействующую которых обозначили **R**. Силу **R** разложили на две составляющие **P** и **Q**. Эти составляющие есть

лобовое сопротивление (**Q**)и подъемная сила (**P**). (рис.85)

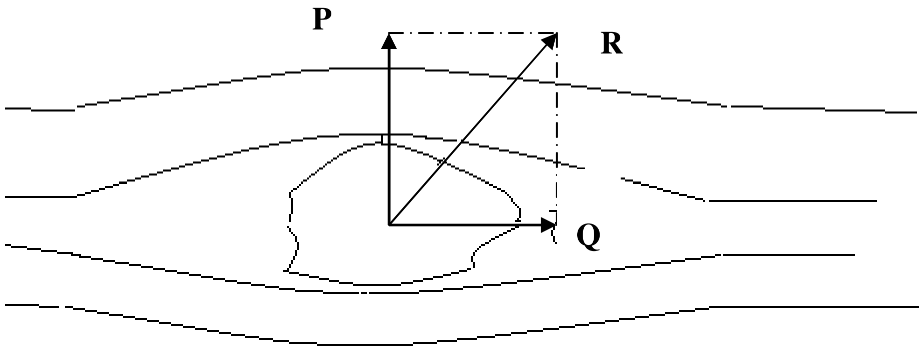


рис. 85

Лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. Сопротивление давления существенно зависит от формы тела. (рис.86)

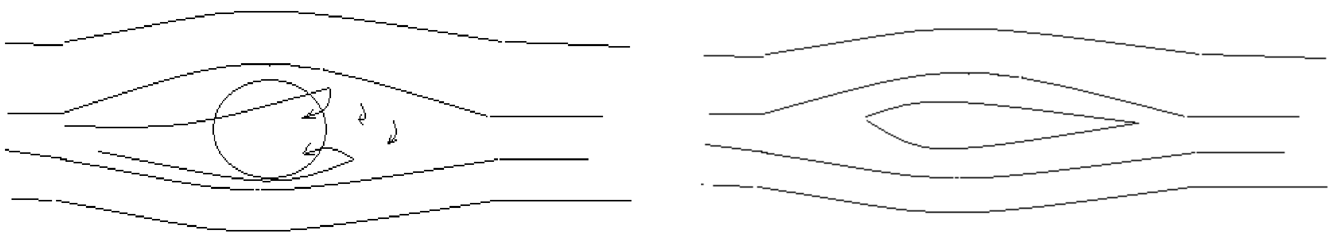


рис. 86

Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется значением числа Рейнольдса Re. При малых значениях Re основную роль играет сопротивление трения. При больших значениях Re в лобовом сопротивлении преобладают силы давления.

Т.к. при малых значениях Re, т.е. при небольших скоростях движения сопротивление среды обусловлено только силами трения, Стокс установил, что сила сопротивления пропорциональна коэффициенту динамической вязкости, скорости движения и характерному размеру тела:

$$F \sim \eta V l$$

Коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Для шара:

$$F = 6\pi\eta V r$$

Для возникновения подъемной силы вязкость жидкости не имеет существенного значения.

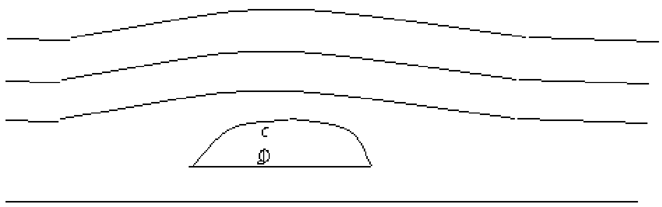


рис. 87

Т.к. линии тока сгущаются у точки С, то давление здесь будет меньше, чем у точки D (рис.87), и возникает подъемная сила(рис.88).

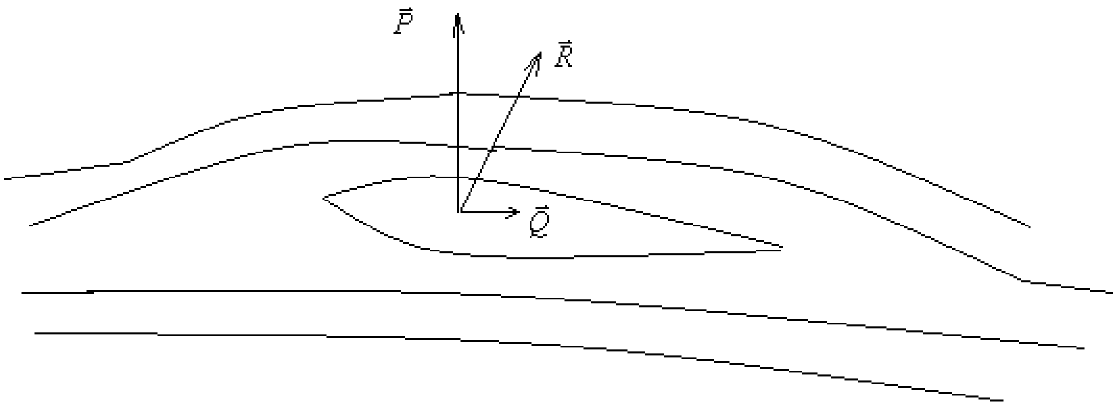


рис. 88